

CENTRE NATIONAL DE RECHERCHES DE L'ESPACE

3, Avenue Circulaire,  
UCCLE - BRUXELLES 18.

NOTES INTERNES

N° 5

INTRODUCTION AU PROBLEME DE LA DETERMINATION DE LA DENSITE  
ATMOSPHERIQUE A PARTIR DE L'ETUDE DES VARIATIONS ORBITALES  
DES SATELLITES

J. VERCHEVAL

Mai 1964

Les Notes Internes ne peuvent être diffusées sans l'autorisation  
des personnes responsables de leur préparation.

INTRODUCTION AU PROBLEME DE LA DETERMINATION DE LA DENSITE  
ATMOSPHERIQUE A PARTIR DE L'ETUDE DES VARIATIONS ORBITALES  
DES SATELLITES

-----

1. INTRODUCTION.

Cette note servira de point de départ pour l'étude du problème de la détermination de la densité atmosphérique à partir des variations des orbites et plus particulièrement des périodes de révolution des satellites artificiels de la Terre.

Nous savons que les lois de Képler régissent le mouvement d'un point matériel soumis à l'attraction gravifique d'un autre point matériel. Ces lois seraient applicables aux satellites artificiels de la Terre si ceux-ci n'étaient soumis qu'à l'action d'un champ gravifique terrestre central; or, il faudrait pour cela que deux conditions essentielles soient satisfaites: la Terre devrait se comporter comme si toute sa masse était concentrée en son centre et aucune force autre que la force d'attraction terrestre ne devrait entrer en jeu. Bien qu'en réalité aucune de ces conditions n'est satisfaite, il nous a semblé intéressant néanmoins de rappeler les trois lois de Képler car nous pouvons admettre en effet qu'elles régissent en première approximation le mouvement des satellites étant donné que leur simple application peut fournir des données utiles dans des problèmes comme celui des prévisions des passages des satellites.

Mais le but réel recherché ici est de présenter la méthode de Sterne [1] qui établit la formule de base reliant les variations de la période d'un satellite aux composantes d'une force

perturbatrice quelconque. Lorsque la nature de la force perturbatrice est parfaitement définie, un problème préliminaire essentiel consiste à exprimer ses composantes en fonction d'une variable convenablement choisie. A titre d'exemple, nous avons déterminé explicitement les composantes de la force perturbatrice qui résulte de la non sphéricité de la Terre. Un travail ultérieur sera consacré à étudier d'un point de vue quantitatif l'effet de cette force sur la période des satellites.

Il nous a semblé utile de commencer cette note par un rappel des définitions des principaux éléments orbitaux.

## 2. DEFINITIONS.

Nous nous proposons ici de définir les éléments orbitaux qui situent à chaque instant dans l'espace un satellite et son orbite.

Comme système de référence, choisissons un système d'axes géocentrique, rectangulaire et non en rotation (  $O; x, y, z$  ) (voir figure 1). Si le point  $O$  est le centre de la Terre, imposons aux axes  $ox$  et  $oy$  de se trouver dans le plan de l'équateur terrestre et à l'axe  $oz$  d'être orienté vers le Nord suivant la ligne des pôles. Supposons à priori que l'orbite  $C$  du satellite est une ellipse dont le plan passe par le centre  $O$  de la Terre, celui-ci occupant l'un des foyers (nous verrons dans la section suivante que cette hypothèse traduit la réalité dans des conditions bien particulières). La localisation du satellite et de son orbite dans l'espace par rapport au système  $(o; x, y, z)$  peut s'effectuer en quatre étapes :

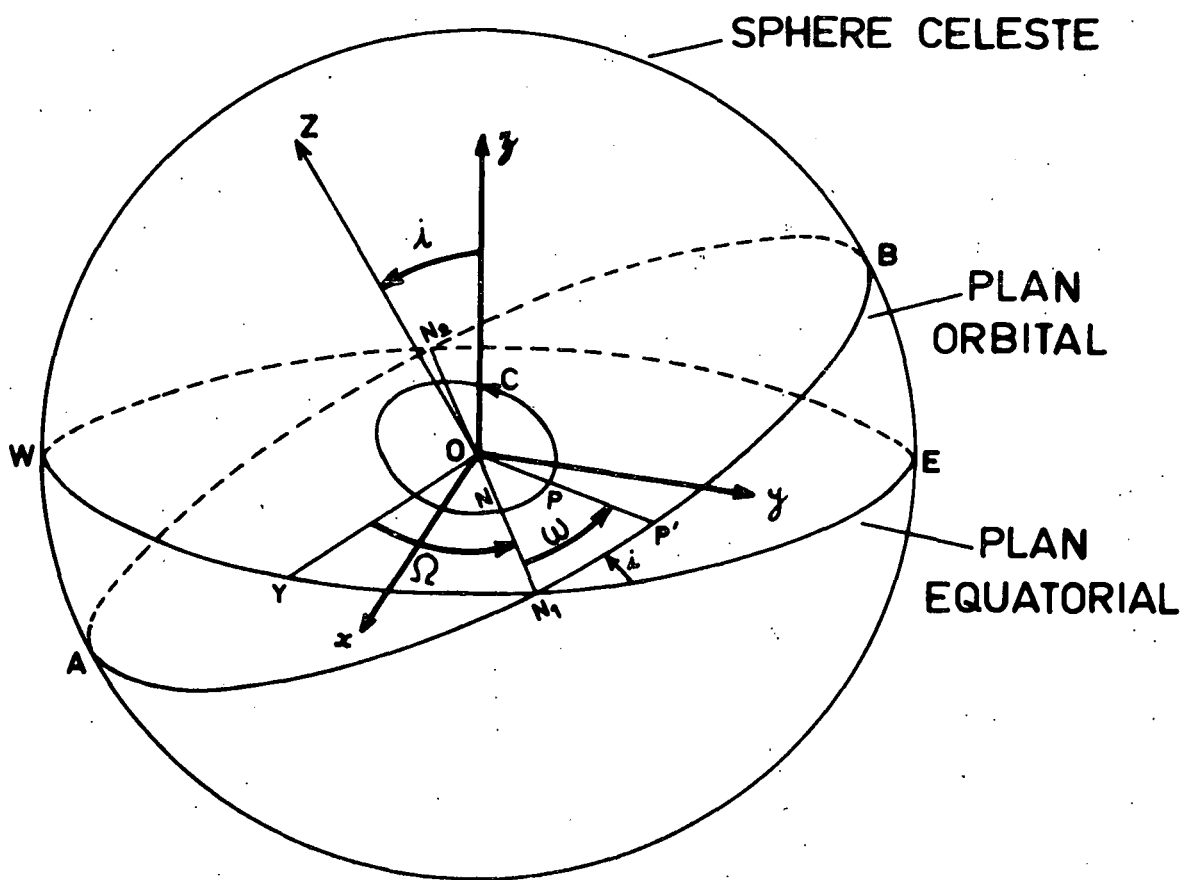


Fig. 1.- Représentation des éléments orbitaux  $\Omega$ ,  $i$  et  $\omega$ .

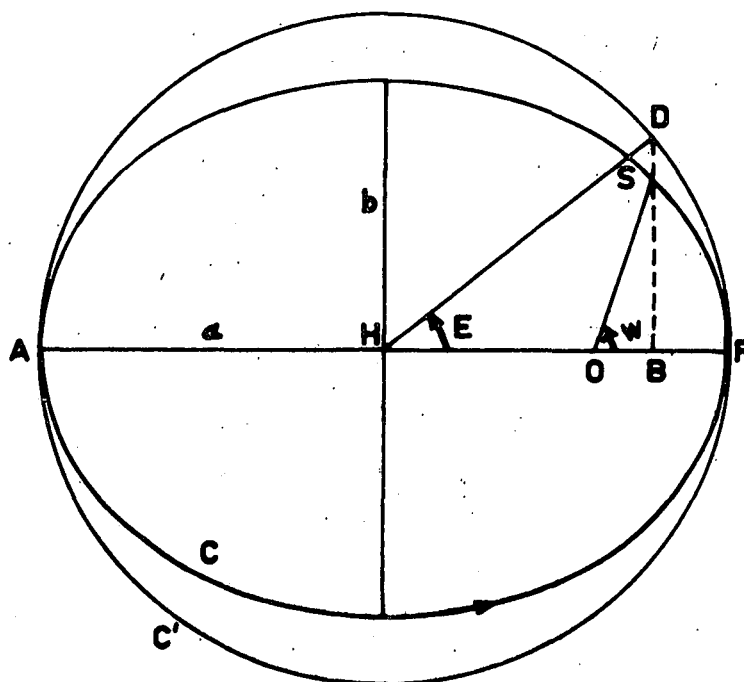
- a) situer le plan orbital par rapport au plan de l'équateur terrestre.
- b) définir l'orientation de l'orbite dans son plan.
- c) définir la forme et les dimensions de l'orbite.
- d) situer le satellite sur son orbite.

Sur la figure 1, nous avons représenté par les grands cercles  $AN_1BN_2A$  et  $WN_1EN_2W$  les traces dans la sphère céleste du plan orbital et du plan équatorial respectivement. La droite  $N_1N_2$ , intersection de ces deux plans, est appelée " ligne des noeuds ". Si  $o\gamma$  désigne la direction de la droite vernale (intersection du plan de l'équateur et du plan de l'écliptique), l'angle  $\Omega$ , mesuré à partir de  $o\gamma$  dans le plan équatorial et dans le sens indiqué sur la figure (vers l'est), est l'ascension droite du noeud ascendant N ( $0^\circ \leq \Omega \leq 360^\circ$ ). Désignons à présent par  $OZ$  la normale au plan orbital au centre de la Terre; si pour un observateur regardant dans le sens  $OZ$ , le mouvement du satellite s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre, l'angle  $i$  est l'inclinaison de l'orbite ( $0^\circ \leq i \leq 180^\circ$ ). Les deux angles  $\Omega$  et  $i$  sont deux éléments orbitaux qui déterminent complètement l'orientation du plan orbital ainsi que le sens du mouvement du satellite.

En ce qui concerne l'orientation de l'orbite dans son plan, un seul élément angulaire est nécessaire: l'argument du péri-gée  $\omega$ , mesuré à partir de la ligne des noeuds dans le plan et le sens du mouvement ( $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$ ).

Quant à la forme et aux dimensions de l'orbite, on peut

simplement les définir par le demi-grand axe  $a$  et l'excentricité  $e$ , éléments caractéristiques de toute ellipse (voir figure 2).



Représentation de l'anomalie vraie  $W$  et de l'anomalie excentrique  $E$ .

Rappelons que ces deux éléments orbitaux sont reliés par la formule

$$e = \left( \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right)^{1/2} \quad (1)$$

où  $b$  est le demi-petit axe de l'orbite.

Finalement, en attribuant une valeur déterminée à une variable angulaire convenablement choisie, nous pouvons situer le

satellite sur son orbite. En général, le rôle de cette variable sera tenu soit par l'anomalie vraie  $w$  soit par l'anomalie excentrique  $E$ . Reportons-nous à la figure 2 et supposons qu'à un instant donné, le satellite se trouve en  $S$  ; l'anomalie vraie du satellite à cet instant est définie par l'angle que fait le rayon vecteur  $OS$  avec le rayon vecteur  $OP$ , le point  $P$  désignant le périhélie. D'autre part, soit  $C'$  le cercle de centre  $H$  admettant le grand axe  $AP$  comme diamètre; si la perpendiculaire  $BS$  abaissée de  $S$  à  $AP$  rencontre le cercle  $C'$  en  $D$ , l'angle  $PHD$  représente l'anomalie excentrique  $E$  du satellite à l'instant considéré.

En ce qui nous concerne, les variables angulaires  $w$  et  $E$  seront toujours mesurées à partir du demi-grand-axe  $HP$  dans le sens du mouvement et seront donc toujours comprises entre  $0^\circ$  et  $360^\circ$ . Ces variables sont d'autre part reliées par les formules suivantes :

$$\sin w = (1 - e^2)^{1/2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E} \quad (2)$$

$$\cos w = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad (3)$$

$$\cos E = \frac{\cos w + e}{1 + e \cos w} \quad (4)$$

$$\sin E = \frac{\sin w (1 - e^2)^{1/2}}{1 + e \cos w} \quad (5)$$

Nous ne pouvons terminer cette section sans avoir défini

la période de révolution P d'un satellite qui représente en réalité le temps nécessaire à celui-ci pour effectuer une révolution complète. La quantité

$$n = \frac{2 \pi}{P} \quad (6)$$

généralement appelée "mouvement angulaire moyen" représente la vitesse angulaire moyenne du satellite au cours d'une révolution.

A partir de ce mouvement moyen, on peut enfin définir l'anomalie moyenne M en posant :

$$M = nt \quad (7)$$

où t est le temps écoulé depuis le dernier passage du satellite au périhélie. Il est possible de montrer que l'anomalie moyenne M et l'anomalie excentrique E sont reliées par la formule :

$$M = E - e \sin E \quad (8)$$

### 3. MOUVEMENT ELLIPTIQUE.

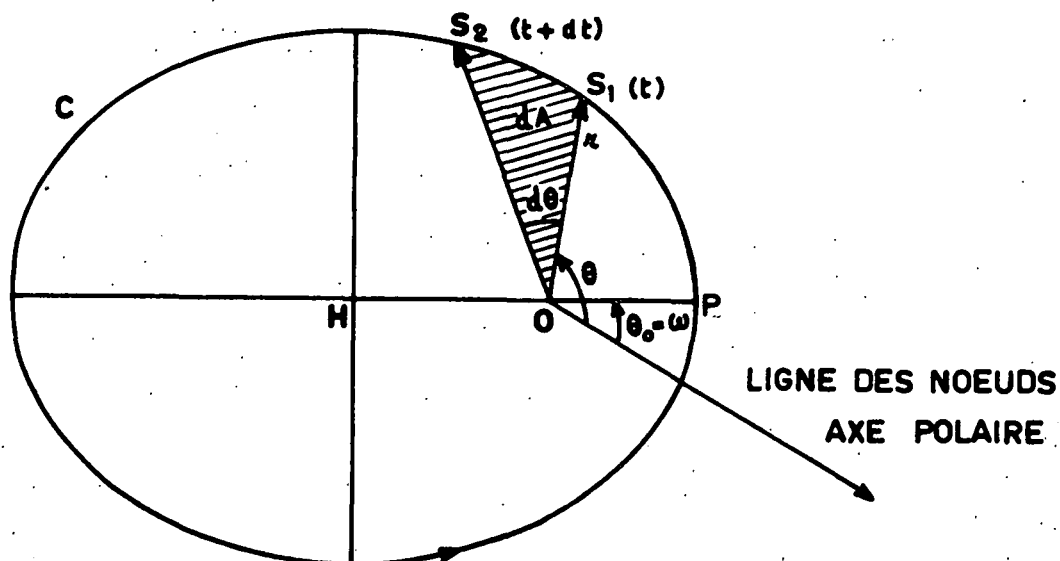
Nous ne nous proposons pas ici de développer la théorie du problème des deux corps mais simplement de rappeler brièvement les lois qui régissent le mouvement dont un satellite serait affecté s'il n'était soumis qu'à l'action du champ gravifique terrestre supposé central. Rappelons que par définition, un champ extérieur est dit central lorsque son énergie potentielle dépend exclusivement de la distance r à un point donné. Dans le cas d'un champ de gravitation newtonien, l'énergie potentielle est inversement proportionnelle à r et la force correspondante inversement pro-



proportionnelle à  $r^2$ . En réalité, cette hypothèse ne s'applique qu'aux cas où l'on considère soit une Terre sphérique et homogène, soit plus généralement une Terre sphérique dans laquelle la densité est uniquement fonction de la distance géocentrique. Tout se passe alors comme si la masse totale de la Terre était concentrée en son centre.

En l'absence de toute force perturbatrice, le mouvement d'un satellite de masse  $m$ , soumis à l'attraction gravifique terrestre ( champ de force central ), est régi par les trois lois de Képler :

I. Le satellite se déplace autour du centre  $O$  de la Terre sur une orbite elliptique  $C$ , le point  $O$  occupant l'un des foyers ( voir fig.3).



Deuxième loi de Képler: l'aire  $dA$  balayée par le rayon vecteur  $r$  pendant l'intervalle de temps  $dt$  est proportionnelle à  $dt$ .

Si nous rapportons cette orbite à un système de coordonnées polaires  $( r, \theta )$  fixé en  $O$ , son équation peut se mettre sous la forme :

$$r = \frac{a ( 1 - e^2 )}{1 + e \cos ( \theta - \theta_0 )} \quad (9)$$

où  $a$  et  $e$  sont respectivement le demi-grand axe et l'excentricité de l'ellipse  $C$ .

Si nous dirigeons l'axe polaire suivant la ligne des noeuds, nous avons évidemment  $\theta_0 = \omega$  où  $\omega$  est l'argument du périhélie défini dans la section 2. Dans ce cas, nous pouvons écrire :

$$r = \frac{a ( 1 - e^2 )}{1 + e \cos w} \quad (10)$$

où  $w = \theta - \omega$  est l'anomalie vraie.

L'équation de l'orbite peut aussi être donnée en fonction de l'anomalie excentrique  $E$ ; en tenant compte de la formule (3), l'équation (10) peut se mettre sous la forme :

$$r = a ( 1 - e \cos E ) \quad (11)$$

II. Reportons-nous à la figure 3 et supposons qu'aux instants  $t$  et  $t + dt$  le satellite se trouve respectivement en  $S_1$  et  $S_2$ . La deuxième loi de Képler peut alors s'énoncer sous la forme suivante: L'aire  $dA$  de la figure 3 balayée par le rayon vecteur  $r$  pendant l'intervalle de temps  $dt$  est proportionnelle à  $dt$ , c'est à dire que :

$dA = h' dt$  où  $h'$  est une constante.

Puisque  $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ ,

nous avons donc:

$$\frac{1}{2} r^2 d\theta = h' dt$$

$$\text{ou } r^2 \dot{\theta} = h \quad (12)$$

en ayant posé  $2 h' = h$

En remarquant que l'aire totale  $\Upsilon$  a b de l'ellipse est décrite par le rayon vecteur en un intervalle de temps égal à une période  $P$ , nous pouvons écrire que :

$$\frac{2 \Upsilon a b}{P} = h \quad (13)$$

La constante  $h$  est appelée " constante des aires ".  
D'un point de vue physique, cette constante représente le moment par rapport au point  $O$  de la quantité de mouvement du satellite par unité de masse.

En effet, les composantes de la vitesse du satellite suivant le rayon vecteur  $\vec{r}$  d'une part et la perpendiculaire à ce rayon dans le plan et le sens du mouvement d'autre part étant respectivement  $\dot{r}$  et  $r \dot{\theta}$ , nous pouvons écrire symboliquement:

$$\vec{v} = (\dot{r}, r \dot{\theta}, 0) \quad (14)$$

la composante de la vitesse normale au plan orbital étant nulle.

Si  $\vec{M}$  représente le moment par rapport au point  $O$

de la quantité de mouvement d'un satellite de masse unitaire, nous avons successivement :

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{v} \quad (15)$$

$$\text{et } \vec{M} = ( 0, 0, r^2 \dot{\theta} ) \quad (16)$$

En comparant (12) et (16), nous déduisons que

$$h = |\vec{M}|$$

$$\text{et nous pouvons poser } \vec{h} = \vec{M} = ( 0, 0, r^2 \dot{\theta} ) \quad (17)$$

Le vecteur  $\vec{h}$  est donc un vecteur normal au plan orbital; son sens est défini à partir de la formule (15) en appliquant la règle générale du produit vectoriel.

III. Les carrés des temps de révolution sont proportionnels aux cubes des grands axes, c'est à dire que :

$$p^2 = k' a^3 \quad (18)$$

où  $k'$  est une constante égale à  $\frac{4 \pi^2}{\mu}$ ,  $\mu$  désignant le produit  $G M_T$  de la constante de gravitation universelle  $G$  par la masse de la Terre  $M_T$ . La constante  $k'$  est donc indépendante de la masse du satellite considéré. Toutefois, ceci n'est rigoureux que si la masse du corps en mouvement est infinitésimale par rapport à celle du corps central. Cette hypothèse est certes vérifiée dans le cas d'un satellite artificiel soumis au champ d'attraction terrestre.

En introduisant dans la formule (18) le mouvement moyen

$n = \frac{2 \pi}{P}$ , nous obtenons facilement :

$$n = \left( \frac{\mu}{a^3} \right)^{1/2} \quad (19)$$

En outre, de (13) et (18), il est possible de déduire que :

$$h^2 = \mu a (1 - e^2) \quad (20)$$

Energie totale  $E_T$  du satellite.

$$\text{Nous avons } E_T = E_C + E_P \quad (21)$$

où  $E_C$  et  $E_P$  sont respectivement les énergies cinétique et potentielle du satellite.

Le champ de force considéré étant constant dans le temps, la loi de conservation de l'énergie est applicable. Par conséquent, l'expression de l'énergie totale  $E_T$  peut par exemple être déterminée au périégée. Nous avons successivement :

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 \quad (22)$$

Au périégée, seule la composante  $r \dot{\theta}$  de la vitesse n'est pas nulle. D'où

$$E_C = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$$

$$\text{D'autre part } E_P = - \frac{\mu m}{r} \quad (\text{champ de force central}) \quad (23)$$

$$\text{Donc } E_T = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{\mu m}{r}$$

En remplaçant  $r$  par  $a (1 - e)$  [formule (11) où  $E = 0^\circ$ ], et en tenant compte de (12), nous obtenons :

$$E_T = - \frac{m \mu}{2 a} = \text{constante} \quad (24)$$

Signalons dès maintenant qu'en présence d'une force perturbatrice quelconque, l'énergie  $E_T$  subira des variations au cours du temps. Ainsi, la formule (24) pourra servir de formule de base pour la suite de ce travail étant donné que l'élément orbital  $a$  est relié directement à la période  $P$  par la formule (18).

A partir des relations (21), (22), (23) et (24), nous obtenons aisément l'expression de la vitesse  $v$  du satellite en fonction de sa position sur l'orbite :

$$v = \mu^{1/2} \left[ \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right]^{1/2}$$

ou  $v = \left( \frac{\mu}{a} \right)^{1/2} \left[ \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E} \right]^{1/2}$  (25)

puisque  $r = a ( 1 - e \cos E )$ .

### FORCE PERTURBATRICE.

D'une manière générale, on désigne par " force perturbatrice " toute force qui, agissant sur le satellite, tend à éloigner celui-ci de l'orbite képlérienne qu'il décrirait s'il se trouvait dans les conditions exposées à la section 3.

Pour un satellite terrestre, la résistance atmosphérique, la pression de radiation solaire, la forme irrégulière du globe terrestre et l'attraction de la Lune et du Soleil sont à l'origine des principales forces perturbatrices qui peuvent affecter le mouvement d'un satellite. Ainsi donc en réalité, les éléments orbitaux qui déterminent parfaitement l'orbite képlérienne d'un satellite, subissent des variations continues de par l'existence de

ces forces perturbatrices. C'est pour cette raison que la notion d'ellipse osculatrice ( ou orbite instantanée ) a été introduite à chaque instant; cette ellipse osculatrice est la trajectoire elliptique que suivrait le satellite si toutes les forces perturbatrices cessaient d'agir à l'instant déterminé. Les éléments de cette ellipse sont les "éléments osculateurs". Une telle ellipse est évidemment une abstraction pure dont l'intérêt pratique est surtout manifeste dans les problèmes de prévision, bien qu'en général, lorsqu'on considère des intervalles de temps considérables, cette ellipse peut s'écarter sensiblement de l'orbite réelle.

Avant d'étudier les effets de ces diverses forces perturbatrices sur la période d'un satellite, il est utile d'établir une formule générale reliant les variations de la période aux composantes d'une force perturbatrice quelconque.

##### 5. EFFET D'UNE FORCE PERTURBATRICE QUELCONQUE SUR LA PERIODE D'UN SATELLITE.

Reprenons le système d'axes (  $o; x, y, z$  ) défini dans la section 2 et utilisons les coordonnées géocentriques polaires (  $r, \theta$  ) de la section 3. L'axe polaire coïncide avec l'axe  $ox$  et est dirigé suivant la ligne des noeuds.

Comme Sterne [1], supposons que  $S$ ,  $T$ , et  $W$  sont les composantes de la force perturbatrice par unité de masse agissant sur le satellite supposé être en  $A$  ( fig. 4. ). Les vecteurs  $\vec{S}$  et  $\vec{T}$  situés dans le plan orbital sont dirigés respectivement suivant le rayon vecteur  $\vec{r}$  et la perpendiculaire à ce rayon dans le sens du mouvement orbital;  $\vec{W}$  est la composante vecto-

rielle normale au plan orbital dont le sens est tel que le mouvement du satellite est positif lorsqu'on applique la règle du tire-bouchon. Il est évident que seules les composantes S et T situées dans le plan orbital entraînent la déformation de l'orbite et en particulier la variation du demi-grand axe a.

Suite à l'action de la force perturbatrice ( S, T, W ), l'énergie totale  $E_T$  du satellite subit une variation  $d \left( - \frac{\mu}{2a} \right)$  pendant le temps infinitésimal dt. Nous avons :

$$d \left( - \frac{\mu}{2a} \right) = ( \dot{r} S + r \dot{\theta} T ) dt \quad (26)$$

$$\text{ou } \frac{\mu}{2a^2} da = ( \dot{r} S + \frac{h T}{r} ) dt \quad (27)$$

en tenant compte de (12) .

D'autre part, en posant  $r = \frac{1}{u}$ , nous avons successivement :

$$\dot{r} = - \frac{\dot{u}}{u^2} = - r^2 \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = - r^2 \frac{d \left( \frac{1}{r} \right)}{d\theta} \dot{\theta}$$

En tenant compte de (9), (12) et (20), nous avons finalement :

$$\dot{r} = \frac{\mu}{h} e \sin (\theta - \omega) \quad (28)$$

où e et  $\omega$  sont des éléments osculateurs.

Nous avons également :

$$\dot{r} = \frac{\mu}{h} e \sin w \quad (29)$$



où  $w$  est l'anomalie vraie.

En tenant compte des formules (9), (20) et (29), l'équation (27) devient :

$$\frac{\mu}{2 a^2} da = \frac{\mu}{h} \left[ e S \sin w + T (1 + e \cos w) \right] dt \quad (30)$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{2 a^2 \cos \phi}{h} \left[ S \operatorname{tg} \phi \sin w + T \sec \phi (1 + e \cos w) \right] \quad (31)$$

où nous avons posé  $e = \sin \phi$  (32)

Nous pouvons remplacer  $\frac{\cos \phi}{h}$  par  $\frac{1}{(\mu a)^{1/2}}$

tiré de (20) :

$$\frac{da}{dt} = 2 \left( \frac{a^3}{\mu} \right)^{1/2} \left[ S \operatorname{tg} \phi \sin w + T \sec \phi (1 + e \cos w) \right] \quad (33)$$

Il faut remarquer que l'excentricité  $e$  et le demi-grand axe  $a$  figurant dans le second membre de cette relation sont en fait des éléments osculateurs moyens. Si nous supposons que les variations des éléments orbitaux au cours d'une révolution du satellite sont suffisamment petites que pour négliger leurs carrés et puissances supérieures, les éléments  $a$  et  $e$  du second membre de la relation précédente peuvent être considérés comme des constantes.

Donc, au cours d'une révolution, le demi-grand axe  $a$  subit une variation  $\Delta a$  donnée par :

$$\Delta a = 2 \left( \frac{a^3}{\mu} \right)^{1/2} \int_0^P \left[ S \operatorname{tg} \phi \sin w + T \sec \phi (1 + e \cos w) \right] dt \quad (34)$$

où  $P$  est la période du satellite.

D'autre part, de la formule (18), nous déduisons successivement :

$$\frac{da}{dt} = \frac{2 P}{3 k' a^2} \quad \frac{dP}{dt} = \frac{2 a}{3 P} \frac{dP}{dt}$$

et 
$$\Delta a = \frac{2 a}{3} \frac{dP}{dt} \quad (35)$$

En remplaçant  $\Delta a$  dans (34), nous obtenons :

$$\frac{2a}{3} \frac{dP}{dt} = 2 \left( \frac{a^3}{\mu} \right)^{1/2} \int_0^P \left[ S \operatorname{tg} \phi \sin w + T \sec \phi (1 + e \cos w) \right] dt \quad (36)$$

ou 
$$\frac{dP}{dt} = 3 \left( \frac{a}{\mu} \right)^{1/2} \int_0^P \left[ S \operatorname{tg} \phi \sin w + T \sec \phi (1 + e \cos w) \right] dt \quad (37)$$

## 6. FORCE PERTURBATRICE DUE A LA NON SPHERICITE DE LA TERRE.

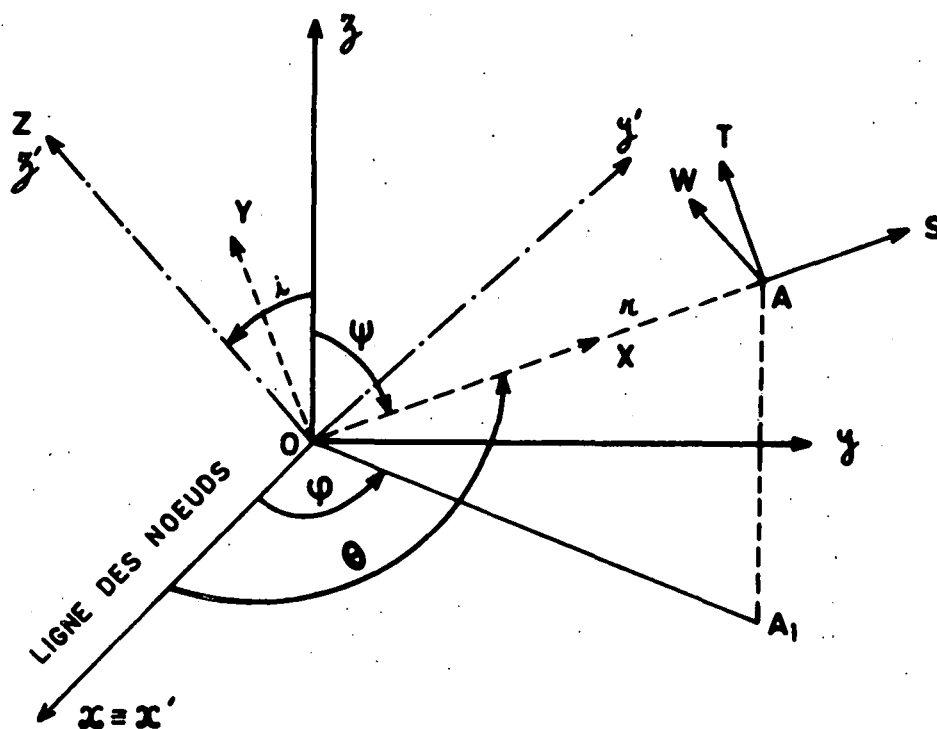
Nous supposons ici que la Terre est un sphéroïde de rayon équatorial  $R_E$  dont le champ gravifique est indépendant de la longitude  $\psi$  et symétrique par rapport au plan équatorial. En seconde approximation, le potentiel gravifique externe  $U$  en un point  $(r, \psi)$  s'exprime alors sous la forme suivante :

$$U = - \frac{GM_T}{r} \left[ 1 - \frac{J}{3} \left( \frac{R_E}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \psi - 1) \right] \quad (38)$$

où  $r$  et  $\psi$  sont respectivement la distance géocentrique et la colatitude du point considéré;  $J$  est un coefficient de l'ordre de  $1,6 \cdot 10^{-3}$  [2].

Notre but ici est de déterminer les composantes  $S$ ,  $T$  et  $W$  de la force perturbatrice due à la présence du terme en  $J$  dans le second membre de (38), la présence exclusive du premier terme correspondant au cas d'un champ central.

Soient  $f_x$ ,  $f_y$  et  $f_z$  les composantes de la force gravifique dans le système d'axes géocentrique  $(o; x, y, z)$  défini dans la section 2 où l'axe  $ox$  est supposé dirigé suivant la ligne des noeuds ( voir fig. 4).



Représentation des systèmes d'axes  $(o; x, y, z)$ ,  
 $(o; x', y', z')$  et  $(O; X, Y, Z)$ .

Si  $f_{x'}$ ,  $f_{y'}$  et  $f_{z'}$  sont les composantes de cette force rapportée au système d'axes (  $o$ ;  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  ) obtenu en faisant subir aux axes  $oy$  et  $oz$  une rotation d'un angle  $i$  (inclinaison du plan orbital) autour de l'axe  $ox$ , nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{x'} = f_x \\ f_{y'} = f_y \cos i + f_z \sin i \\ f_{z'} = - f_y \sin i + f_z \cos i \end{array} \right. \quad (39)$$

Si à présent, nous faisons subir aux axes  $ox'$  et  $oy'$  une rotation d'un angle  $\theta = \omega + w$  autour de l'axe  $oz'$ , nous obtenons le système d'axes (  $O$ ;  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  ) où  $\overrightarrow{OX}$ ,  $\overrightarrow{OY}$  et  $\overrightarrow{OZ}$  sont respectivement parallèles aux vecteurs  $\overrightarrow{S}$ ,  $\overrightarrow{T}$  et  $\overrightarrow{W}$ . Si nous désignons par  $f_X$ ,  $f_Y$  et  $f_Z$  les composantes correspondantes de la force gravifique, nous avons successivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_X = f_{x'} \cos \theta + f_{y'} \sin \theta \\ f_Y = - f_{x'} \sin \theta + f_{y'} \cos \theta \\ f_Z = f_{z'} \end{array} \right. \quad (40)$$

En tenant compte de (39), nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_X = f_x \cos \theta + f_y \cos i \sin \theta + f_z \sin i \sin \theta \\ f_Y = - f_x \sin \theta + f_y \cos i \cos \theta + f_z \sin i \cos \theta \\ f_Z = - f_y \sin i + f_z \cos i \end{array} \right. \quad (41)$$

Détermination de  $f_x$ ,  $f_y$  et  $f_z$ .

Nous avons:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x = - \frac{dU}{dx} = - \left[ \frac{dU}{dr} \frac{dr}{dx} + \frac{dU}{d\psi} \frac{d\psi}{dx} \right] \\ f_y = - \frac{dU}{dy} = - \left[ \frac{dU}{dr} \frac{dr}{dy} + \frac{dU}{d\psi} \frac{d\psi}{dy} \right] \\ f_z = - \frac{dU}{dz} = - \left[ \frac{dU}{dr} \frac{dr}{dz} + \frac{dU}{d\psi} \frac{d\psi}{dz} \right] \end{array} \right. \quad (42)$$

$$\frac{dU}{dr} = \frac{GM_T}{r^2} \left[ 1 - J \left( \frac{R_E}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \psi - 1) \right] \quad (43)$$

$$\frac{dU}{d\psi} = - \frac{2 GM_T}{r} J \left( \frac{R_E}{r} \right)^2 \cos \psi \sin \psi \quad (44)$$

D'autre part, si  $\psi$  désigne la longitude du satellite, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r} = \cos \psi \quad \sin \psi \\ \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r} = \sin \psi \quad \sin \psi \\ \frac{dr}{dz} = \frac{z}{r} = \cos \psi \end{array} \right. \quad (45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \psi \frac{d\psi}{dx} = \frac{xz}{r^3} = \frac{\cos \psi \sin \psi \cos \psi}{r} \\ \sin \psi \frac{d\psi}{dy} = \frac{yz}{r^3} = \frac{\sin \psi \sin \psi \cos \psi}{r} \\ \sin \psi \frac{d\psi}{dz} = -\frac{x^2 + y^2}{r^3} = -\frac{\sin^2 \psi}{r} \end{array} \right. \quad (46)$$

En tenant compte des relations (43) à (46), nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x = -\frac{GM_T}{r^2} \left[ 1 - J \left( \frac{R_E}{r} \right)^2 (5 \cos^2 \psi - 1) \cos \psi \sin \psi \right. \\ f_y = -\frac{GM_T}{r^2} \left[ 1 - J \left( \frac{R_E}{r} \right)^2 (5 \cos^2 \psi - 1) \sin \psi \sin \psi \right. \\ f_z = -\frac{GM_T}{r^2} \left[ 1 - J \left( \frac{R_E}{r} \right)^2 (5 \cos^2 \psi - 3) \right] \cos \psi \end{array} \right. \quad (47)$$

En remplaçant dans les relations (41), nous obtenons:

$$\begin{aligned} f_x = -\frac{GM_T}{r^2} & \left\{ \left[ 1 - J \left( \frac{R_E}{r} \right)^2 (5 \cos^2 \psi - 1) \right] (\cos \psi \sin \psi \cos \theta \right. \\ & + \sin \psi \sin \psi \cos i \sin \theta) + \left[ 1 - J \left( \frac{R_E}{r} \right)^2 (5 \cos^2 \psi - 3) \right] \\ & \left. \cos \psi \sin i \sin \theta \right\} \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned}
 f_Y = & - \frac{GM_T}{r^2} \left\{ \left[ 1 - J \left( \frac{R_E}{r} \right)^2 (5 \cos^2 \psi - 1) \right] (-\cos \psi \sin \psi \sin \theta \right. \\
 & + \sin \psi \sin \psi \cos i \cos \theta) + \left[ 1 - J \left( \frac{R_E}{r} \right)^2 (5 \cos^2 \psi - 3) \right] \\
 & \left. \cos \psi \sin i \cos \theta \right\} \quad (49)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_Z = & - \frac{GM_T}{r^2} \left\{ - \left[ 1 - J \left( \frac{R_E}{r} \right)^2 (5 \cos^2 \psi - 1) \right] \sin \psi \sin \psi \cos i \right. \\
 & + \left[ 1 - J \left( \frac{R_E}{r} \right)^2 (5 \cos^2 \psi - 3) \right] \cos \psi \cos i \quad (50)
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, il est possible de voir d'après la figure

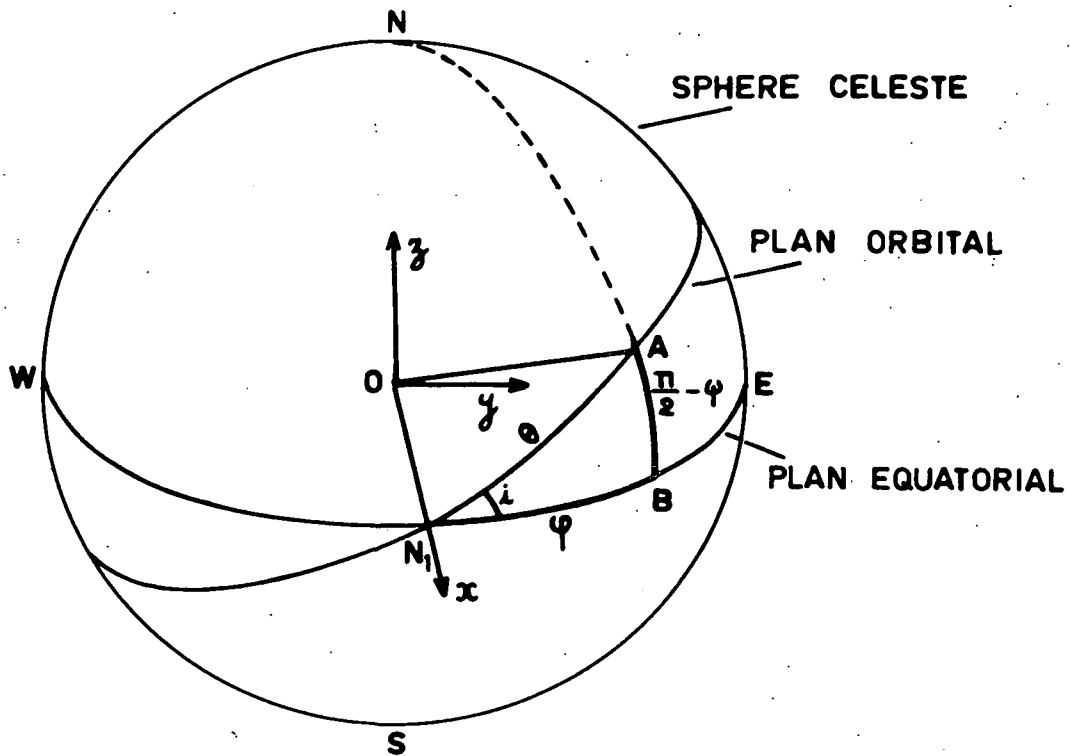
5 que :

$$\cos \psi = \sin i \sin \theta \quad (51)$$

$$\sin \psi = \left( 1 - \sin^2 i \sin^2 \theta \right)^{1/2} \quad (52)$$

$$\sin \psi = \frac{\cos i \operatorname{tg} \theta}{1 + \cos^2 i \operatorname{tg}^2 \theta} \quad (53)$$

$$\cos \psi = \frac{1}{\left( 1 + \cos^2 i \operatorname{tg}^2 \theta \right)^{1/2}} \quad (54)$$



Le triangle sphérique  $ABN_1$  permet de relier entre eux les éléments  $i$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  et  $\psi$ .

Si nous tenons compte des 4 formules précédentes, les expressions des composantes  $f_X$ ,  $f_Y$  et  $f_Z$  se mettent respectivement sous la forme suivante :

$$f_X = - \frac{GM_T}{r^2} \left[ 1 + J \left( \frac{R_E}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 i \sin^2 \theta) \right] \quad (55)$$

$$f_Y = - \frac{GM_T}{r^2} \left( \frac{R_E}{r} \right)^2 J \sin^2 i \sin^2 \theta \quad (56)$$



$$f_Z = - \frac{GM_T}{r^2} \left( \frac{R_E}{r} \right)^2 J \sin 2 i \sin \theta \quad (57)$$

Dans le cas d'une Terre sphérique à champ de forces central, nous avons :

$$f_X = - \frac{GM_T}{r^2} \quad \text{et} \quad f_Y = f_Z = 0$$

Par conséquent, les composantes S, T et W de la force perturbatrice due à la présence du terme en J dans le potentiel gravifique terrestre, sont donc données par les expressions suivantes :

$$S = A ( 1 - 3 \sin^2 i \sin^2 \theta ) \quad (58)$$

$$T = f_Y = A \sin^2 i \sin^2 \theta \quad (59)$$

$$W = f_Z = A \sin 2 i \sin \theta \quad (60)$$

où nous avons posé :

$$A = - \frac{GM_T}{r^2} J \left( \frac{R_E}{r} \right)^2 \quad (61)$$

Une étude ultérieure sera faite sur le rôle joué par ces quantités en ce qui concerne les variations de la période des satellites.

Cependant dès maintenant, afin de comparer les ordres de grandeur de ces composantes, nous avons calculé les rapports  $\frac{S}{A}$ ,  $\frac{T}{A}$  et  $\frac{W}{A}$  lorsque les paramètres  $i$  et  $\theta$  varient dans leurs domaines de définition respectifs. Les résultats sont rassemblés dans les tableaux 1, 2 et 3 et sont représentés graphiquement à la figure 6.

TABLEAU 1.  $\frac{S}{A}$

$\theta$ i	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	i
0°	1	1	1	1	1	1	1	1	180°
10°	1	0,955	0,910	0,955	1	0,955	0,910	0,955	170°
20°	1	0,825	0,649	0,825	1	0,825	0,649	0,825	160°
30°	1	0,625	0,250	0,625	1	0,625	0,250	0,625	150°
40°	1	0,380	-0,240	0,380	1	0,380	-0,240	0,380	140°
50°	1	0,120	-0,760	0,120	1	0,120	-0,760	0,120	130°
60°	1	-0,125	-1,250	-0,125	1	-0,125	-1,250	-0,125	120°
70°	1	-0,325	-1,649	-0,325	1	-0,325	-1,649	-0,325	110°
80°	1	-0,455	-1,910	-0,455	1	-0,455	-1,910	-0,455	100°
90°	1	-0,500	-2,000	-0,500	1	-0,500	-2,000	-0,500	90°

TABLEAU 2.  $\frac{T}{A}$

$\theta$ i	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	i
0°	0	0	0	0	0	0	0	0	180°
10°	0	0,030	0	-0,030	0	0,030	0	-0,030	170°
20°	0	0,117	0	-0,117	0	0,117	0	-0,117	160°
30°	0	0,250	0	-0,250	0	0,250	0	-0,250	150°
40°	0	0,413	0	-0,413	0	0,413	0	-0,413	140°
50°	0	0,587	0	-0,587	0	0,587	0	-0,587	130°
60°	0	0,750	0	-0,750	0	0,750	0	-0,750	120°
70°	0	0,883	0	-0,883	0	0,883	0	-0,883	110°
80°	0	0,970	0	-0,970	0	0,970	0	-0,970	100°
90°	0	1	0	-1	0	1	0	-1	90°

TABLEAU 3.     W  
                              —  
                              A

$\theta \backslash i$	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
0°	0	0	0	0	0	0	0	0
10°	0	0,242	0,342	0,242	0	-0,242	-0,342	-0,242
20°	0	0,455	0,643	0,455	0	-0,455	-0,643	-0,455
30°	0	0,612	0,866	0,612	0	-0,612	-0,866	-0,612
40°	0	0,696	0,985	0,696	0	-0,696	-0,985	-0,696
50°	0	0,696	0,985	0,696	0	-0,696	-0,985	-0,696
60°	0	0,612	0,866	0,612	0	-0,612	-0,866	-0,612
70°	0	0,455	0,643	0,455	0	-0,455	-0,643	-0,455
80°	0	0,242	0,342	0,242	0	-0,242	-0,342	-0,242
90°	0	0	0	0	0	0	0	0
100°	0	-0,242	-0,342	-0,242	0	0,242	0,342	0,242
110°	0	-0,455	-0,643	-0,455	0	0,455	0,643	0,455
120°	0	-0,612	-0,866	-0,612	0	0,612	0,866	0,612
130°	0	-0,696	-0,985	-0,696	0	0,696	0,985	0,696
140°	0	-0,696	-0,985	-0,696	0	0,696	0,985	0,696
150°	0	-0,612	-0,866	-0,612	0	0,612	0,866	0,612
160°	0	-0,455	-0,643	-0,455	0	0,455	0,643	0,455
170°	0	-0,242	-0,342	-0,242	0	0,242	0,342	0,242
180°	0	0	0	0	0	0	0	0

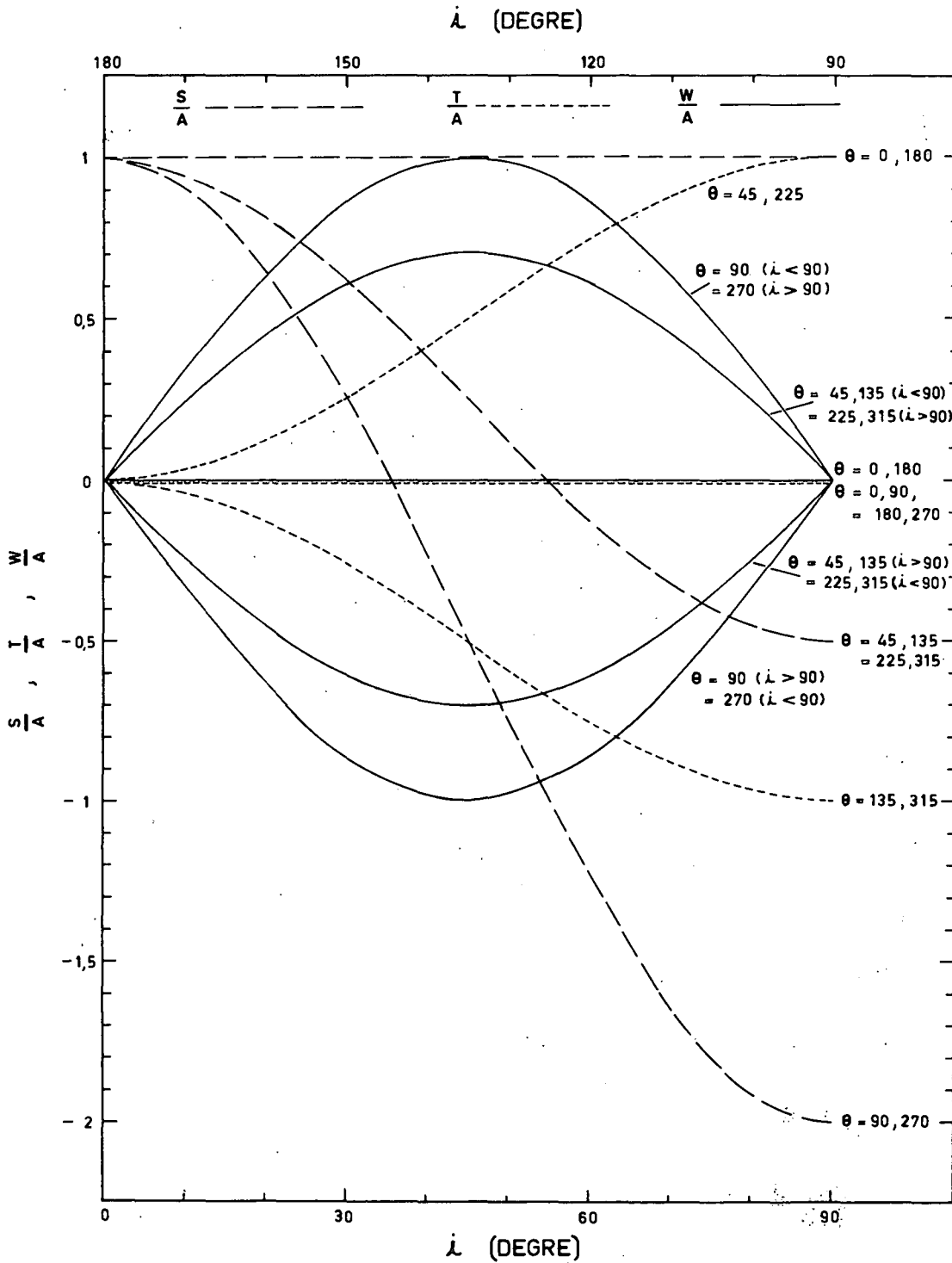


Fig. 6.- Variation des quantités  $\frac{S}{A}$ ,  $\frac{T}{A}$  et  $\frac{W}{A}$  en fonction de l'inclinaison  $i$  et du paramètre  $\theta$ .

De cette figure, en supposant la quantité  $A$  constante, nous pouvons relever quelques remarques intéressantes.

a) Lorsque le satellite se situe au-dessus de l'équateur terrestre en un des noeuds de son orbite, seule la composante radiale  $S$  n'est pas nulle ( $S = A$  quel que soit  $\theta$ ). Si l'orbite est équatoriale, il est clair que la même conclusion s'impose quelle que soit alors la position du satellite.

b) Si l'orbite est polaire, la composante normale au plan orbital  $W$  est toujours nulle et l'importance des deux autres composantes dépend de la position du satellite sur son orbite. Si par exemple le satellite se situe au-dessus des pôles ( $\theta = 90^\circ$  ou  $270^\circ$ ), la composante  $S$  atteint un maximum en valeur absolue ( $|S| = 2|A|$ ). Quant à la quantité  $T$ , elle atteint un maximum ( $|T| = |A|$ ) lorsque la latitude du satellite est égale à  $45^\circ$  nord ou sud; elle passe par un minimum nul lorsque le satellite se situe soit au-dessus de l'équateur, soit au-dessus des pôles.

c) Les satellites dont les orbites sont inclinées de  $45^\circ$  ou  $135^\circ$  par rapport au plan de l'équateur sont soumis à une action maximum de la part de la composante normale  $W$ .

Ces remarques ont été faites en supposant la quantité  $A$  constante. Cependant, si nous nous référons à la relation (61), nous constatons que pour une orbite déterminée la quantité  $A$  varie d'un point à l'autre de l'orbite et atteint par exemple un maximum au périhélie. Il faudra donc tenir compte de ce fait pour localiser les portions de l'orbite plus particulièrement sujettes à l'action

des différentes composantes de la force perturbatrice. Ceci ne constitue pas une difficulté supplémentaire importante étant donné que les positions dans l'espace de l'orbite et du satellite sont toujours connues à priori.

## 7. CONCLUSION.

Lorsque se pose le problème de l'étude de l'effet d'une force perturbatrice bien définie sur la période de révolution des satellites artificiels, la formule de base à utiliser est la relation (37) de cette présente note. L'exemple présenté à la section 6 de la force perturbatrice due à la non sphéricité de la Terre montre qu'il est intéressant d'exprimer les composantes de la force sous une forme qui permet une analyse préliminaire qualitative ou quantitative de ces composantes; l'importance de celles-ci dépend en général de la position dans l'espace de l'orbite et du satellite.

Références

1. Sterne, T., An introduction to celestial mechanics, pp 206, Interscience Publishers, Inc., New York, 1960
2. King-Hele, D.G., The effect of the earth's oblateness on the orbit of a near satellite, Proc. Roy. Soc., 247 A, 49-72, 1958