

Méthode des moindres carrés appliquée à la réduction des clichés astrométriques

par

H. Debehogne et E. Van Hemelrijck

Observatoire Royal de Belgique, Bruxelles

Received on April 1, 1974

RESUMÉ

Les formules de transformation polynomiales des coordonnées mesurées (x, y) en coordonnées standard (X, Y) donnent les équations normales par application de la méthode des moindres carrés.

Pour tester les formules, on utilise un nombre important d'étoiles-tests, c'est-à-dire qui n'interviennent pas dans la détermination des équations normales: ces étoiles-tests sont donc traitées comme des comètes ou des astéroïdes et comparées avec les catalogues. Les étoiles de référence sont également recalculées et comparées avec les catalogues. Les moyennes arithmétiques des écarts obtenus pour les deux groupes d'étoiles, portées en ordonnée, donnent les graphiques des erreurs interne (étoiles de base) et externe (étoiles-tests) pour des nombres croissants d'étoiles de référence (abscisse); lorsque les deux lignes se joignent, on obtient le nombre optimum d'étoiles de référence au delà duquel toute augmentation de ce nombre devient inutile. Ces graphiques donnent également la précision des calculs effectués à partir de l'instrument utilisé et au moyen des formules choisies. Les calculs portant sur l'erreur quadratique moyenne fournissent des enseignements très voisins.

Dans le cas des clichés des nuages artificiels créés en Sardaigne par l'Institut d'Aéronomie Spatiale de Belgique, pris avec une caméra de distance focale égale à 500 mm, la formule polynomiale du troisième degré a donné d'excellents résultats.

1. Introduction

Le programme pour déterminer par la méthode des moindres carrés, la direction d'un objet céleste (étoile, astre errant, nuage artificiel) à partir de clichés pris au moyen d'instruments de caractéristiques diverses et inconnues, a été élaboré avec quelques légères variantes pour les ordinateurs IBM 1800 (Institut d'Aéronomie Spatiale de Belgique) et IBM 360/44 (Institut Royal Météorologique de Belgique).

Les formules polynomiales utilisées ont reçu une désignation conventionnelle et ont été testées au moyen d'un groupe d'étoiles-tests.

La méthode des moindres carrés a été brièvement exposée d'un point de vue pratique, adapté au présent problème.

2. Principe général de la méthode de calcul

Ayant effectué les mesures x et y , on calcule les coordonnées standard X , Y d'étoiles connues à partir de leurs coordonnées α , δ par les formules (Debehogne *et al.* 1972);

$$X = \cos \delta \sin(\alpha - \alpha_0)/A, \quad (1)$$

$$Y = [\sin \delta \cos \delta_0 - \cos \delta \sin \delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0)]/A, \quad (2)$$

$$A = \sin \delta \sin \delta_0 + \cos \delta \cos \delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0), \quad (3)$$

α et δ étant l'ascension droite et la déclinaison de l'étoile considérée, α_0 et δ_0 , les coordonnées de l'étoile dont l'image est prise comme origine dans le plan des mesures.

Les formules de transformation des coordonnées mesurées (x, y) en coordonnées standard (X, Y) contiennent des constantes a_{ij} et b_{ij} appelées constantes du cliché,

$$X = \sum_{i+j=0}^n a_{ij} x^i y^j, \quad Y = \sum_{i+j=0}^n b_{ij} x^i y^j, \quad (4), (5)$$

n entier positif, i et j entiers, positifs ou nuls, tels que $i+j = k \leq n$ où j croît et i décroît. Cette convention permet de préciser aisément les termes, leur place et l'allure des formules, notamment quand certains a_{ij} et b_{ij} sont pris nuls au départ (soit en vertu de considérations théoriques ou empiriques, soit dans un but de recherche expérimentale).

Parmi les formules de transformation prenons par exemple

$$X = \sum_{i+j=0}^2 a_{ij} x^i y^j, \quad Y = \sum_{i+j=0}^2 b_{ij} x^i y^j, \quad (6), (7)$$

c'est-à-dire :

$$X = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \quad (8)$$

$$Y = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2. \quad (9)$$

La détermination des constantes du cliché (a_{00} , a_{10} , ..., a_{02}) comporte : — l'établissement de N (nombre d'étoiles) équations de condition (ou d'observation), à partir des coordonnées x , y et α , δ (ou X , Y) de chaque étoile (appelée étoile de base ou de référence).

Pour $N = 10$, on a

$$\begin{aligned}
X_1 &= a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}y_1 + \dots + a_{02}y_1^2, \\
X_2 &= a_{00} + a_{10}x_2 + a_{01}y_2 + \dots + a_{02}y_2^2, \\
&\dots \dots \dots \\
X_{10} &= a_{00} + a_{10}x_{10} + a_{01}y_{10} + \dots + a_{02}y_{10}^2,
\end{aligned}
\tag{10}$$

— la formation d'autant d'équations normales qu'il y a de constantes du cliché (pour les formules (8-9) il y a 6 équations normales)

$$\begin{aligned}
[1]a_{00} + [x]a_{10} + [y]a_{01} + [x^2]a_{20} + [xy]a_{11} + [y^2]a_{02} &= [X], \\
[x]a_{00} + [x^2]a_{10} + [xy]a_{01} + [x^3]a_{20} + [x^2y]a_{11} + [xy^2]a_{02} &= [xX], \\
[y]a_{00} + [xy]a_{10} + [y^2]a_{01} + [x^2y]a_{20} + [xy^2]a_{11} + [y^3]a_{02} &= [yX], \\
[x^2]a_{00} + [x^3]a_{10} + [x^2y]a_{01} + [x^4]a_{20} + [x^3y]a_{11} + [x^2y^2]a_{02} &= [x^2X], \\
[xy]a_{00} + [x^2y]a_{10} + [xy^2]a_{01} + [x^3y]a_{20} + [x^2y^2]a_{11} + [xy^3]a_{02} &= [xyX], \\
[y^2]a_{00} + [xy^2]a_{10} + [y^3]a_{01} + [x^2y^2]a_{20} + [xy^3]a_{11} + [y^4]a_{02} &= [y^2X],
\end{aligned}
\tag{11}$$

avec

$$\begin{aligned}
[1] &= N \times 1 = 10, \\
[x] &= x_1 + x_2 + \dots + x_{10}, \\
[y] &= y_1 + y_2 + \dots + y_{10}, \\
[x^2] &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2, \\
&\dots \dots \dots \\
[X] &= X_1 + X_2 + \dots + X_{10}, \\
[xX] &= x_1X_1 + x_2X_2 + \dots + x_{10}X_{10}, \\
&\dots \dots \dots
\end{aligned}
\tag{12}$$

— la résolution des équations normales (qui fournissent les a_{ij}). De la même façon on trouve les b_{ij} .

Les coefficients a_{ij} et b_{ij} étant déterminés, on les utilise pour calculer l'ascension droite α et la déclinaison δ , soit

- d'une des étoiles de base;
- d'une étoile (appelée étoile-test) autre que celles utilisées pour établir les équations de condition;
- d'un objet céleste (astéroïde, comète, planète, satellite, nuage artificiel).

Après le calcul de X et Y pour un objet dont l'image a pour mesures x et y au moyen des formules (6 – 7), on détermine α , δ par la transformation inverse de celle utilisée en début de programme pour passer des α , δ aux X , Y , c'est-à-dire

$$\operatorname{tg}(\alpha - \alpha_0) = \frac{X}{\cos \delta_0 - Y \sin \delta_0}, \quad (13)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\cos(\alpha - \alpha_0)(\sin \delta_0 + Y \cos \delta_0)}{\cos \delta_0 - Y \sin \delta_0}. \quad (14)$$

A la fin du programme, on détermine la moyenne arithmétique des écarts que les α et δ calculés présentent par rapport aux α , δ des catalogues pour les étoiles de base et les étoiles-tests. Ceci donne une indication quant à la précision de la méthode de réduction.

3. Designation conventionnelle d'une transformation

La transformation

$$\begin{aligned} X &= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + \boxed{a_{11}xy} + \boxed{a_{02}y^2} + a_{30}x^3 \\ &\quad + a_{21}x^2y + \boxed{a_{12}xy^2} + a_{03}y^3, \\ Y &= b_{00} + \boxed{b_{10}x} + b_{01}y + \boxed{b_{20}x^2} + \boxed{b_{11}xy} + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 \\ &\quad + \boxed{b_{21}x^2y} + \boxed{b_{12}xy^2} + b_{03}y^3, \end{aligned}$$

dans laquelle les termes encadrés seront supprimés, sera décrite: (3; 3,5; 5, 6, 9; 2, 4, 5, 8, 9). En général, si le degré maximum des polynomes X et Y vaut n , si K et L sont les nombres de termes omis dans ces polynomes et si n_{xk} , n_{yl} représentent les numéros d'ordre de ces termes, la formule de transformation sera désignée simplement par

$$(n; K, L; n_{x1}, \dots, n_{xk}, \dots, n_{xK}; n_{y1}, \dots, n_{yk}, \dots, n_{yL}). \quad (15)$$

4. Application

Ce programme a servi à déterminer de nombreuses positions d'astres errants, satellites, astéroïdes, phénomènes Apollo, comètes, nuages artificiels (Van Hemelrijck *et al.* 1972), ... D'autre part, il a permis ou per-

mettra de tester différents instruments de distance focale allant de 7 cm (caméra d'observation de nuages artificiels) et de 30 cm (caméra IGN de l'Institut Géographique National) à 700 cm (Télescope de Bosque Allegre-Argentine — Télescope australien), en passant par l'instrument de la carte du ciel de Cordoba Argentine (350 cm), l'Astrographe double de Zeiss et une bonne dizaine d'autres instruments dont la caméra IAS de 50 cm de distance focale qui nous intéresse plus particulièrement ici, aussi bien que différentes formules de transformation des coordonnées mesurées (x, y) en coordonnées standard (X, Y) .

Ci-après figurent les graphiques des résultats obtenus sur quatre clichés de la caméra IAS pris à Valico Nuraxi et Monte Cardiga, en Sardaigne, lors de l'expérience S 64 de l'éjection de nuages artificiels par l'Institut d'Aéronomie Spatiale de Belgique (IAS) en 1969 (Ackerman *et al.* 1971). Les formules testées sont les suivantes: d'une part,

$$X = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3, \quad (16)$$

$$Y = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{03}y^3,$$

que nous désignons par (3; 3,3; 8,9,10; 7,8,9) (fig. 1): 3 car les formules sont de degré 3, 3, et 3 indiquant le nombre de termes manquant au polynôme complet de degré 3 pour X et Y , 8, 9, 10 donnant les numéros d'ordre des termes supprimés dans X , 7, 8 et 9 donnant les numéros des termes supprimés dans Y ; d'autre part,

$$X = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{03}y^3, \quad (17)$$

$$Y = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3,$$

que nous désignons par (3; 3,3; 7,8,9; 8,9,10) (fig. 2). La méthode a déjà été exposée (Debehogne 1970). Rappelons-en l'essentiel. Sur chaque cliché, soixante étoiles environ ont été réparties dans deux groupes de trente. Un groupe a servi de groupe test; les coordonnées équatoriales ont été calculées et comparées aux coordonnées données dans les catalogues: les moyennes arithmétiques des résidus en α et en δ ont été portées en ordonnées sur les figures 1 et 2.

Ces calculs ont été effectués à partir de systèmes de constantes a_{ij} , b_{ij} déterminées par la méthode des moindres carrés au moyen d'un nombre croissant d'étoiles de référence (10, 12, 14, ... 30) prises dans le premier groupe. Ces nombres N d'étoiles de références sont en abscisses sur les graphiques.

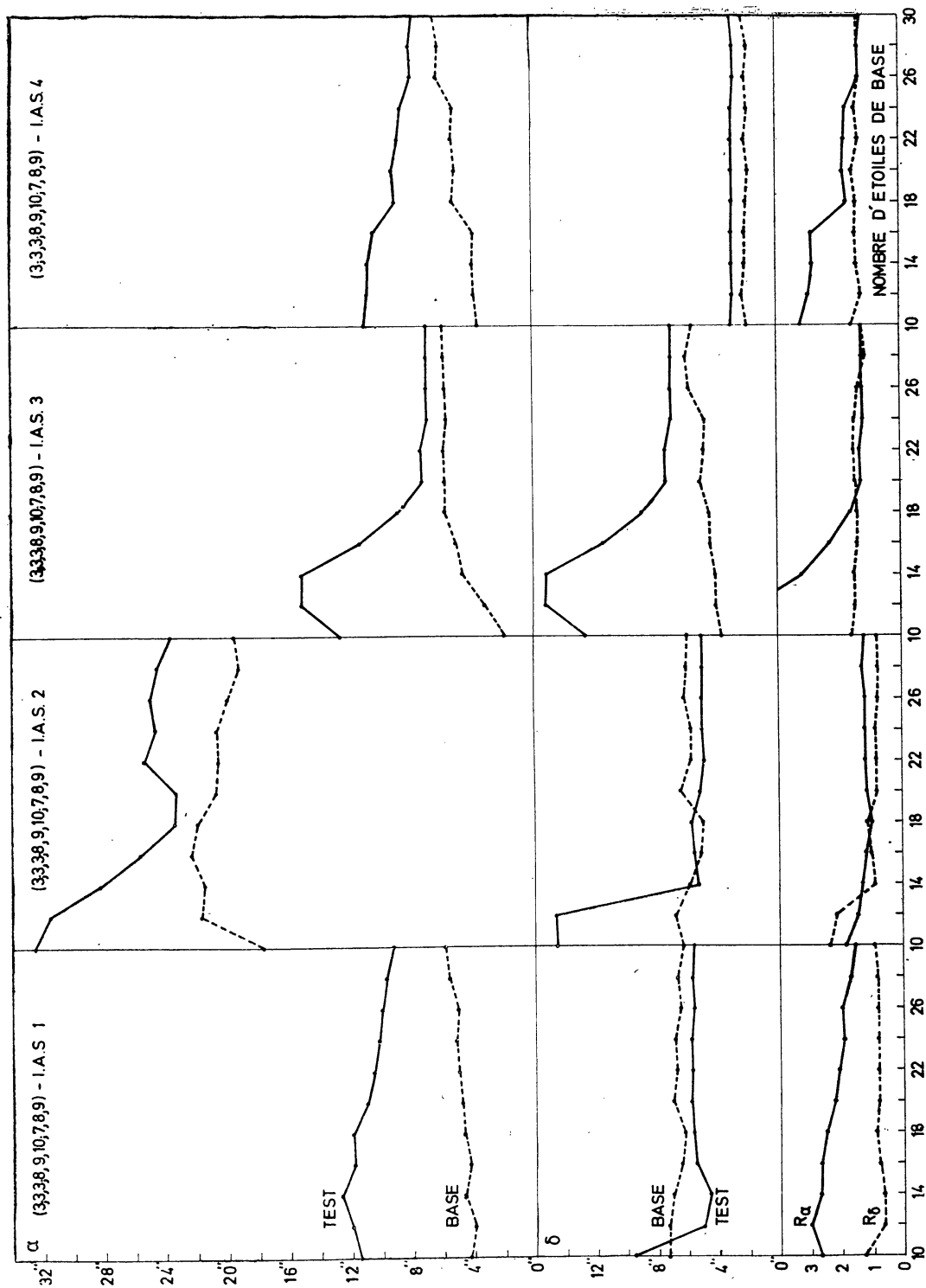


Fig. 1. Etude cliché caméra IAS, $f = 500$ mm, \emptyset 100 mm, champ: $22^\circ \times 28^\circ$
Formules testées (3; 3,3; 8,9,10; 7,8,9):

$$X = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3,$$

$$Y = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{03}y^3.$$

Clichés testés: IAS1, IAS2, IAS3, IAS4 pris à Valico Nuraxi et Monte Cardiga (Sardaigne, 6 et 13 juillet 1969). En ordonnées: moyennes arithmétiques des résidus sur les étoiles de base et de test, en α et δ ; rapports R_α , R_δ des moyennes obtenues en α et δ , sur les étoiles tests aux moyennes obtenues sur les étoiles de base.

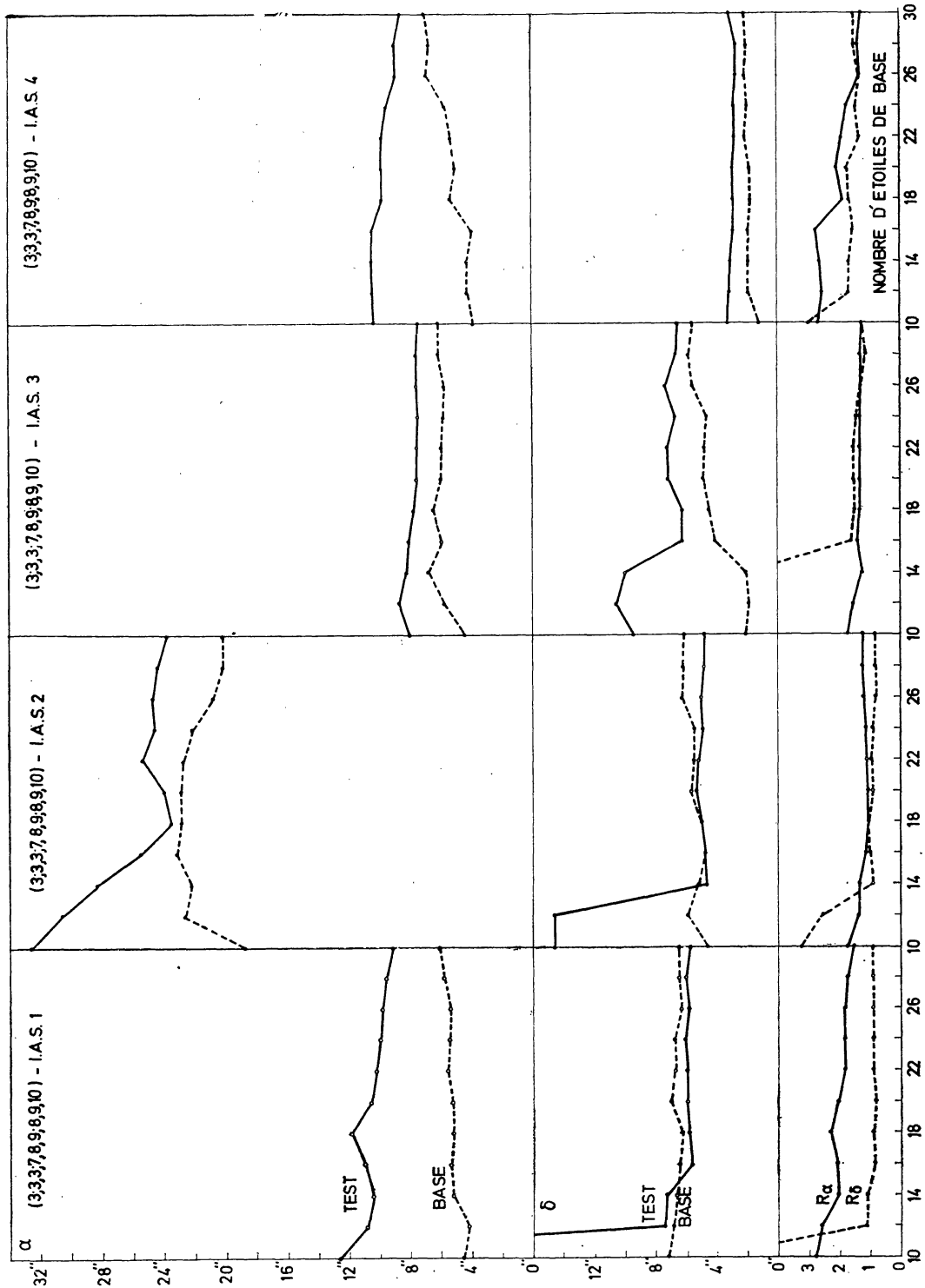


Fig. 2. Etude cliché caméra IAS, $f = 500$ mm, $\varnothing = 100$ mm, champ: $22^\circ \times 28^\circ$
Formules testées (3; 3,3; 7,8,9; 8,9,10):

$$X = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{03}y^3,$$

$$Y = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{03}y^3.$$

Clichés testés: IAS1, IAS2, IAS3, IAS4 pris à Valico Nuraxi et Monte Cardiga (Sardaigne, 6 et 13 juillet 1969). En ordonnées: moyennes arithmétiques des résidus sur les étoiles de base et de test, en α et δ ; rapports R_α , R_δ des moyennes obtenues en α et δ , sur les étoiles-tests aux moyennes obtenues sur les étoiles de base.

Les moyennes arithmétiques des résidus en α et en δ pour les étoiles de référence (notées base) ont également été portées en ordonnées ce qui donne deux lignes (pour le test et la base) qui s'écartent, se croisent ou se chevauchent. L'important est de remarquer pour quelle valeur de N les deux lignes se superposent (aussi bien en α qu'en δ). A ce moment on peut dire que l'on ne gagne plus rien à augmenter le nombre d'étoiles de référence. C'est là une première conclusion importante. Pour les formules (16) et (17) ce nombre optimum d'étoiles de référence vaut environ 18, soit deux fois et demie le nombre de termes (ou de constantes du cliché) a_{ij} ou b_{ij} .

Pour faciliter ce choix, les quotients R des moyennes des résidus pour les tests par les mêmes moyennes pour les bases ont été portés également en graphique.

Une seconde conclusion importante consiste à accorder la préférence aux formules (17) plutôt qu'aux formules (16). En effet, si les résultats sont à peu près équivalents pour trois des quatre clichés étudiés, il n'en va pas de même sur le troisième ou les meilleurs résultats (pour des nombres d'étoiles de référence allant de 10 à 16) sont obtenus avec (17). Quant à l'important écart en α sur le cliché IAS2 nous l'expliquons par la mauvaise répartition des étoiles de référence. Il y a lieu, pour admettre les 8'' comme moyenne arithmétique des écarts, de se rappeler que la caméra IAS est un instrument azimutal sans moteur d'entraînement et que les poses sont de 5 minutes. D'autres formules ont déjà été testées, d'autres le seront encore. Dans l'état actuel des recherches, on peut prendre les formules homogènes du second degré. La remarque est importante car elle permettra d'accorder une confiance justifiée aux réductions des clichés IAS sur lesquels on disposera seulement d'un ombre relativement réduit (quinze à vingt) d'étoiles de référence.

Rappelons qu'une autre méthode d'investigation de la précision des réductions de cliché peut être développée à partir de réseaux d'étoiles fictives (Debehogne 1972).

Signalons également les travaux de Eichhorn *et al.* (1963).

5. Conclusion

Si chaque astrométriste accorde volontiers une préférence quasi définitive à une formule particulière, nous attirons cependant son attention sur les points suivants: une fois reconnue la précision souhaitée pour tel type de travail de réduction, une étude des résidus sur les étoiles-tests doit être effectuée dans chaque cas, les résultats des recherches antérieures servant de guides, mais non de modèles absolus; il apparaît dans

les présents graphiques un nombre d'étoiles optimum, inutile à dépasser dans la pratique et dont la moyenne des valeurs absolues des résidus tend vers une horizontale dont l'ordonnée mesure la précision ultime du calcul.

REFERENCES

- Ackerman, M. and Van Hemelrijck, E. . 1971 *J. Geophys. Res.*, **76**, 3162.
Debehogne, H. 1970 *Astron. and Astrophys.*, **8**, 189.
. 1972 *Astron. and Astrophys., Suppl.*, **5**, 185.
Debehogne, H. et Van Hemelrijck, E. . . 1972 *Bull. Acad. Roy. Belgique, Cl. Sc.*, **58**,
513.
Eichhorn, H. and Williams, C. A. . . . 1963 *Astron. Jour.*, **68**, 221.
Van Hemelrijck, E. et Debehogne, H. . . 1972 *Ciel et Terre*, **88**, 292.