#### INSTITUT D'AERONOMIE SPATIALE DE BELGIQUE

3, avenue Circulaire, UCCLE - BRUXELLES 18

# AERONOMICA ACTA

A - Nº 16 - 1962

Densité d'un gaz neutre dans l'exosphère par M. GODART

#### par M. GODART

#### 1. Introduction

Dans une atmosphère soumise à la pesanteur, le libre parcours moyen des particules augmente avec l'altitude par suite de la décroissance de la densité. On est ainsi amené à admettre l'existence d'une région atmosphérique où les collisions peuvent être négligées (dans un sens qui reste d'ailleurs à préciser). Cette région est appelée l'exosphère. Elle débute à un certain niveau critique situé à une distance R du centre de la planète.

De nombreux problèmes, comme celui de la libération des gaz du champ d'attraction planétaire exigent la connaissance de la densité dans l'exosphère. Mais la détermination de cette densité est très difficile car elle est liée à la nature des particules (neutres ou chargées), à la présence de champs magnétiques dans le cas des particules chargées, à la rotation de la planète, etc ... Par suite de la complexité de ce problème, il est indispensable de l'attaquer par étapes en limitant le nombre de facteurs agissant, mais en veillant toutefois à ce que les résultats obtenus puissent être utilisés dans des cas plus complexes.

C'est dans cet esprit que nous nous proposons de déterminer ici la densité des particules neutres dans l'exosphère. Des considérations physiques permettent de traiter ce problème en supposant que le gaz est à température constante dans l'exosphère. Il est alors possible de calculer la densité grâce à l'équation hydrostatique valable pour un état en équilibre thermodynamique local. Cette équation s'écrit

$$\rho(r) = \rho(R) \quad e^{-\frac{R}{r} \frac{r - R}{H(R)}}$$
 (1a)

ou bien, si  $\rho(R)$  = 1 et en désignant cette fois par  $\rho(r)$  la densité relative

2.-

$$\rho(r) = e$$
 (1b)

avec 
$$y = R r^{-1}$$
 (2)

$$E = R H^{-1}(R)$$
 (3)

$$H(R) = kT(R)/mg(R)$$
 (4)

Les notations employées sont bien connues : k est la constante de Boltzmann, m est la masse de la particule de l'élément considéré, T(R) et g(R) sont respectivement la température absolue et l'accélération de la pesanteur au niveau R. Comme R, r est mesuré depuis le centre de la planète.

Toutefois, cette approximation ne peut pas être rigoureusement correcte, car en l'absence de collisions, l'hypothèse d'un équilibre thermodynamique local n'est pas fondée. Un tel équilibre exige en effet des échanges statistiques suffisamment fréquents d'énergie cinétique et de quantité de mouvement des molécules.

Nous calculerons donc la densité par une méthode appropriée. Elle prendra en considération la distribution statistique des seules particules qui ont quitté ou qui rejoindront le niveau R, et à chaque altitude, nous estimerons leur contribution à la densité.

#### 2. Description de la méthode.

L'expression de la densité relative  $\rho(r)$  peut se déduire directement du théorème de Liouville. Celui-ci établit que la densité des particules dans l'espace des phases reste constante le long des trajectoires dynamiques. En toute rigueur, il n'est valable que si le mouvement des particules est régi par les équations canoniques seulement. Ainsi, son application devrait être interdite si les chocs étaient trop fréquents. Par la suite, nous supposerons que les collisions dans l'exosphère sont assez rares pour permettre l'emploi de ce théorème. Nous écrivons donc:

$$f(r,v) = f(R,v_0)$$
 (5)

où f(r,v) désigne la densité des particules dans l'espace des phases au point

de coordonnées r, v. Les quantités r, v, R et v étant liées par les équations du mouvement, il s'agit de rechercher ces relations.

Ecrivons les lois de conservation de l'énergie et du moment de la quantité de mouvement par rapport au centre de la planète. Nous avons :

$$\frac{v^2}{2} - \frac{1}{r} g(R) R^2 = \frac{v^2}{2} - \frac{1}{R} g(R) R^2$$
 (6)

$$r v \sin\theta = R v \sin\theta_{0}$$
 (7)

Dans ces équations, les angles  $\theta$  et  $\theta$  sont les angles faits par la trajectoire avec les verticales aux niveaux r et R respectivement (voir fig.1).

Les relations (6) et (7) peuvent s'écrire :

$$v = [v_o^2 - 2g(R) R(1-y)]^{1/2}$$
 (6')

$$v \sin\theta = v y \sin\theta$$
 (7')

Supposons maintenant que la densité et la température soient des constantes au niveau critique R. La densité relative  $\rho(r)$  est alors donnée par la formule :

$$\rho(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \, d\mathbf{V} \tag{8}$$

L'élément de volume de l'espace des vitesses est de la forme

$$dV = 4\pi v^2 \sin\theta \ dv \ d\theta \tag{9}$$

D'après (5) et (9), nous pouvons mettre (8) sous la forme :

$$\rho(\mathbf{r}) = 4\pi \int f(\mathbf{R}, \mathbf{v}_0) \mathbf{v}^2 \sin\theta \, d\mathbf{v} \, d\theta \qquad (10)$$

Les limites d'intégration sont :

$$0 \leq v \leq \infty$$
;  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  (11)

Introduisons le jacobien

$$\frac{\partial (\mathbf{v}, \theta)}{\partial (\mathbf{v}, \theta)} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{v}}$$
(12)

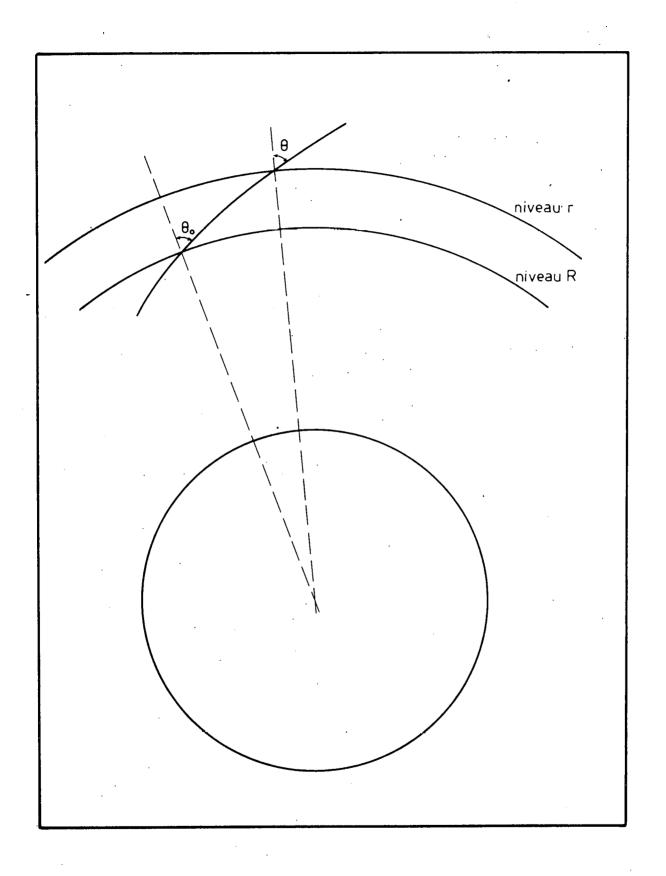


Fig. 1.- Signification physique des symboles R, r,  $\theta$  et  $\theta_{o}$ 

afin de transformer l'intégration sur v et  $\theta$  en une intégration sur v et  $\theta$ . En utilisant (6') et (7'), on obtient pour (12) :

$$\frac{\partial \left(\mathbf{v}, \theta\right)}{\partial \left(\mathbf{v}_{0}, \theta_{0}\right)} = \left(\mathbf{v}_{0}/\mathbf{v}\right)^{2} \mathbf{y} \cos \theta_{0} \left[1 - \left(\mathbf{v}_{0}\mathbf{y}/\mathbf{v}\right)^{2} \sin^{2} \theta_{0}\right]^{-1/2} \tag{13}$$

Avec ce résultat, l'équation (10) s'écrit après quelques réductions

$$\rho(r) = 4\pi y^{2} \int \frac{f(R, v_{o}) v_{o}^{3} \cos \theta_{o} \sin \theta_{o} d\theta_{o} dv_{o}}{\left[v_{o}^{2} (1-y^{2} \sin^{2}\theta_{o}) - 2g(R) R(1-y)\right]^{1/2}}$$
(14)

Cherchons les limites d'intégration. Nous avons évidemment :

$$0 \le \theta_0 \le \pi/2 \tag{15}$$

La condition sur v s'obtient en exprimant que la particule possédait au niveau R une vitesse suffisante pour atteindre le niveau r. Analytiquement, cette condition qui s'écrit

$$v^2 \cos^2 \theta \ge 0 \tag{16}$$

donne, grace à (6') et (7') :

$$v_o^2 \ge 2g(R) \cdot R \frac{1-y}{1-y^2 \sin^2 \theta_o}$$
 (17')

On l'écrit sous la forme simple

$$v_0 \ge a.u$$
 (17)

en posant

$$u^{2} = \frac{1-y}{1-y^{2}\sin^{2}\theta}$$
 (18)

et

$$a^2 = 2g(R) R (19)$$

Afin de calculer la densité relative  $\rho(r)$ , il nous reste maintenant à choisir la fonction de distribution f(R,v).

#### 3. Distribution de vitesses adoptée

Cinq types de particules contribuent à la densité relative  $\rho(r)$  d'un constituant neutre en un point donné de l'exosphère. Ce sont :

- l° : Les particules quittant la base de l'exosphère avec une vitesse inférieure à la vitesse de libération.
- 2º : Les particules revenant à la base de l'exosphère après l'avoir quittée. Leur vitesse doit être inférieure à la vitesse de libération.
- 3º : Les particules quittant la base de l'exosphère avec une vitesse supérieure à la vitesse de libération.
- 4°: Les particules arrivant à la base de l'exosphère avec une vitesse supérieure à la vitesse de libération. Elles doivent être d'origine interplanétaire.
- 5°: Les particules tournant autour de la planète ou se présentant dans son voisinage et dont les trajectoires ne percent jamais la base de l'exosphère.

Nous ne tiendrons pas compte ici du dernier type de particules. Nous ne prétendons pas que leur contribution à la densité relative est négligeable, mais trop de facteurs difficiles à traiter interviennent dans leur comportement.

Nous admettrons enfin que la distribution des vitesses des quatre autres types de particules est maxwellienne

$$f(R, v_0) = (\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} - mv_0^2 / 2 kT$$
 (20)

Ceci est parfaitement justifié pour les particules des trois premiers types car elles proviennent toutes de la base de l'exosphère où l'équilibre thermodynamique est encore réalisé. Mais les particules du quatrième type sont d'origine interplanétaire et l'argument précédent ne leur est pas applicable. Cette hypothèse très discutable sera examinée en détail plus loin.

Signalons à présent que certains auteurs l'ont rejetée. C'est ainsi que ... Opik et Singer ne considèrent que les particules des trois premiers types. Herring et Kyle qui ont développé très élégamment l'idée de Opik et Singer font la même restriction. Johnson et Fish tiennent compte de tous les types de particules cités plus haut, mais leur méthode est tout à fait différente de celle que nous voulons décrire maintenant. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter les articles originaux cités dans la bibliographie.

### 4. Calcul de la densité

L'expression (14) de la densité  $\rho(r)$  s'écrit, en utilisant (20) et les limites (15) et (17), et en omettant les indices o :

$$\rho(r) = 4 \pi y^2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta J(\theta) d\theta$$
 (21)

avec

$$J(\theta) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_{au}^{\infty} \frac{v^3 e^{-mv^2/2kT} dv}{\left[v^2 (1 - y^2 \sin^2 \theta) - 2g(R) R(1 - y)\right]^{1/2}}$$
(22)

Introduisons la nouvelle variable :

$$w = v a^{-1}$$
 (23)

D'après (3), (4), (18) et (19), nous avons :

$$\frac{m}{2kT} = E \tag{24}$$

$$\frac{\text{m v}^2}{2kT} = E \text{ w}^2 \tag{25}$$

$$v^{2}(1-y^{2}\sin^{2}\theta) - 2g(R) R(1-y) = a^{2}(1-y^{2}\sin^{2}\theta) (w^{2}-u^{2})$$
 (26)

D'où, (22) s'écrit :

$$J(\theta) = \left(\frac{E}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{\left(1 - y^2 \sin^2\theta\right)^{1/2}} \int_{u}^{\infty} \frac{\frac{y^3 e^{-Ew^2}}{w^2 - u^2}}{\left(v^2 - u^2\right)^{1/2}} dw$$
 (27)

Evaluons l'intégrale figurant dans cette expression. Pour cela, introduisons la nouvelle variable :

$$z = \left(w^2 - u^2\right)^{-1/2} \tag{28}$$

Alors:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{3 e^{-Ew^{2}}}{(w^{2}-u^{2})^{1/2}} dw = e^{-Eu^{2}} \int_{0}^{\infty} (z^{2}+u^{2}) e^{-Ez^{2}} dz = \frac{\pi^{1/2}}{4E^{3/2}} e^{-Eu^{2}} [1+2 Eu^{2}]$$
(29)

Nous obtenons ainsi:

$$J(\theta) = \frac{e^{-Eu^2}(1 + 2 Eu^2)}{4\pi(1-y^2 \sin^2\theta)}$$
(30)

En portant cette valeur dans l'expression (21) de la densité, on obtient

$$\rho(r) = y^2 \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-Eu^2} (1+2 Eu^2)}{(1-y^2 \sin^2\theta)^{1/2}} \sin\theta \cos\theta d\theta$$
 (31)

Calculons cette dernière intégrale. A cet effet, exprimons  $\theta$  en fonction de u. D'après (18), nous avons :

$$1 - y^2 \sin^2 \theta = (1 - y)u^{-2}$$
 (32)

$$y^2 \sin\theta \cos\theta d\theta = (1-y)u^{-3}du$$
 (33)

Nous obtenons ainsi, au lieu de (31), en utilisant (32) et (33)

$$\rho(\mathbf{r}) = (1-y)^{1/2} \int_{(1-y)^{1/2}}^{(1+y)^{-1/2}} \frac{e^{-\mathbf{E}u^2}(1+2\mathbf{E}u^2)}{u^2} du$$
 (34)

Comme

$$\frac{d}{du} \left( -\frac{e^{-Eu^2}}{u} \right) = \frac{e^{-Eu^2}(1+2 - Eu^2)}{u^2}$$
 (35)

(34) donne immédiatement

$$\rho(r) = (1-y)^{1/2} \left[ \frac{e^{-Eu^2}}{u} \right]^{-1/2}$$
(1-y)<sup>1/2</sup>
(1+y)<sup>-1/2</sup>

Finalement, nous obtenons l'expression de la densité relative en fonction des paramètres y et E définis par (2) et (3) respectivement:

$$\rho(\mathbf{r}) = e^{-E(1-y)} - (1-y^2)^{1/2} e^{-E/(1+y)}$$
(37)

Quelques unes de ces fonctions sont représentées au graphique de la figure 2.

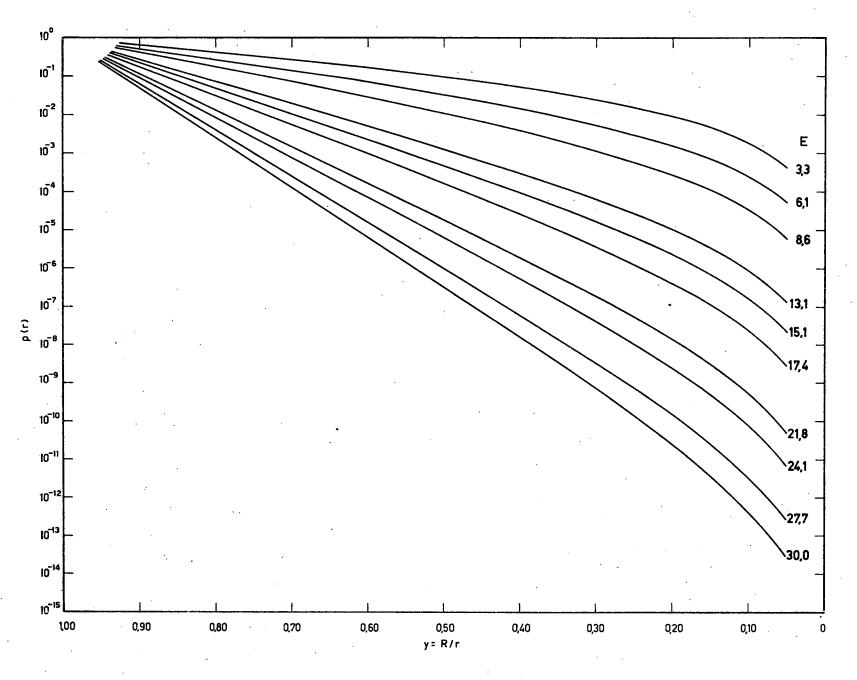


Fig. 2. Variations de la densité relative  $\rho(r)$  en fonction de y pour différentes valeurs du paramètre E = R/H.

#### 5. Remarques

1.- Insistons sur le fait que la formule (37) donne la densité relative des particules d'un type bien déterminé seulement, car la masse m y intervient indirectement. Ce n'est donc pas une densité relative globale.
Désignons par n(r) la densité des particules (d'un type bien déterminé...) à l'altitude r. Nous avons évidemment

$$n(r) = n(R) \rho(r) \tag{38}$$

2.- Calculons  $\rho(R)$ . Nous avons alors y = 1. D'où

$$\rho(R) = 1$$

Ce résultat est tout à fait logique.

3.- Calculons  $\rho(\infty)$ . Nous avons y = 0. D'où

$$\rho(\infty) = 0$$

- 4.- Comparons les formules (1) et (37). La valeur de  $\rho(r)$  donnée par la deuxième formule est toujours inférieure à celle qui est donnée par la première. Ces deux valeurs sont cependant égales en r=R.
- 6. Intégrale  $\int_{R}^{\infty} n(r) dr$ .

Dans certains problèmes concernant la libération des gaz, l'intégrale

$$\int_{p}^{\infty} n(r) dr$$
 (39)

joue un rôle important. Elle intervient par exemple dans l'expression de la probabilité d'échappement d'une particule. Le plus souvent, elle est remplacée par la quantité

$$n(R) \cdot H(R) \tag{40}$$

qui fait intervenir des grandeurs calculées au niveau R seulement. Mais cette approximation justifiée sous certaines hypothèses assez restrictives n'est pas

valable à priori dans le cas qui nous intéresse. Nous allons examiner ici le rapport

$$G = \left(\int_{R}^{\infty} n(r) dr\right) / n(R) H(R)$$
 (41)

chercher les paramètres dont il dépend et voir comment il varie en fonction de ces paramètres.

Nous avons d'abord

$$\int_{R}^{\infty} n(r) dr = n(R) \int_{R}^{\infty} \rho(r) dr$$
 (42)

D'où

$$G = \left(\int_{R}^{\infty} \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}\right) / H(R) \qquad (43)$$

Transformons l'intégrale en dr en une intégrale en dy. Nous obtenons très facilement :

$$G = \int_{0}^{1} E \cdot y^{-2} \left[ e^{-E(1-y)} - (1-y^{2})^{1/2} e^{-E/(1+y)} \right] dy$$
 (44)

Nous voyons ainsi que G dépend du paramètre E seulement.

Proposons nous maintenant de représenter la fonction G(E)=G. Remarquons d'abord qu'elle est définie pour toute valeur de E. Ce n'est pas évident car G(E) ressemble à une intégrale généralisée et pourrait donc ne pas exister. Toutefois, il n'en est rien car l'intégrande est analytique pour |y|<1 comme le prouve son développement en série. De façon précise, nous avons pour |y|<1

$$Ey^{-2}[e^{-E(1-y)} - (1-y^2)^{1/2}e^{-E/(1+y)}]$$

$$= E e^{-E(1-y)} \left[\frac{1+2E}{2} - Ey + (\frac{E}{2} + \frac{1}{8} - \frac{E^2}{2}) y^2 + (E^2 - \frac{E}{2}) y^3 + (\frac{5}{8} E - \frac{5}{4} E^2 + \frac{1}{6} E^3 + \frac{1}{16}) y^4 + \dots\right]$$
(45)

Ceci est illustré à la figure 3 où nous avons porté en graphique quelques courbes représentant la fonction  $\rho(r)/y^2$  pour différentes valeurs du paramètre E.

Il n'est pas possible de calculer simplement les valeurs de la fonction G(E) par les moyens classiques. Mais l'intégration a pu être réalisée numériquement sur l'ordinateur IBM 7070 de l'Institut Royal Météorologique de Belgique. Elle ne présente aucune difficulté. Signalons seulement que pour les petites valeurs de y, le calcul direct de l'intégrande est difficile. Il est alors préférable d'utiliser le développement en série de la formule (45).

Les résultats obtenus ont été portés sur les graphiques de la figure 4. Nous donnons également une table des valeurs de G(E). Nous y voyons que 1 pourrait être la valeur limite de la fonction G(E) quand E augmente indéfiniment. Nous démontrons ci-dessous qu'il en est bien ainsi.

## 7. Valeur limite de la fonction G(E)

Soit  $\delta$  un nombre positif plus petit que 1.

$$0 < \delta < 1 \tag{46}$$

Nous pouvons écrire :

$$G(E) = I_1(E) + I_2(E) - I_3(E)$$
 (47)

avec :

$$I_1(E) = \int_{\delta}^{1} E \frac{e^{-E(1-y)}}{y^2} dy$$
 (48)

$$I_2(E) = \int_0^{\delta} E \frac{e^{-E(1-y)} - (1-y^2)^{1/2} e^{-E/(1+y)}}{y^2} dy$$
 (49)

$$I_3(E) = \int_{\delta}^{1} E \frac{(1-y^2)^{1/2}}{y^2} e^{-E/(1+y)} dy$$
 (50)

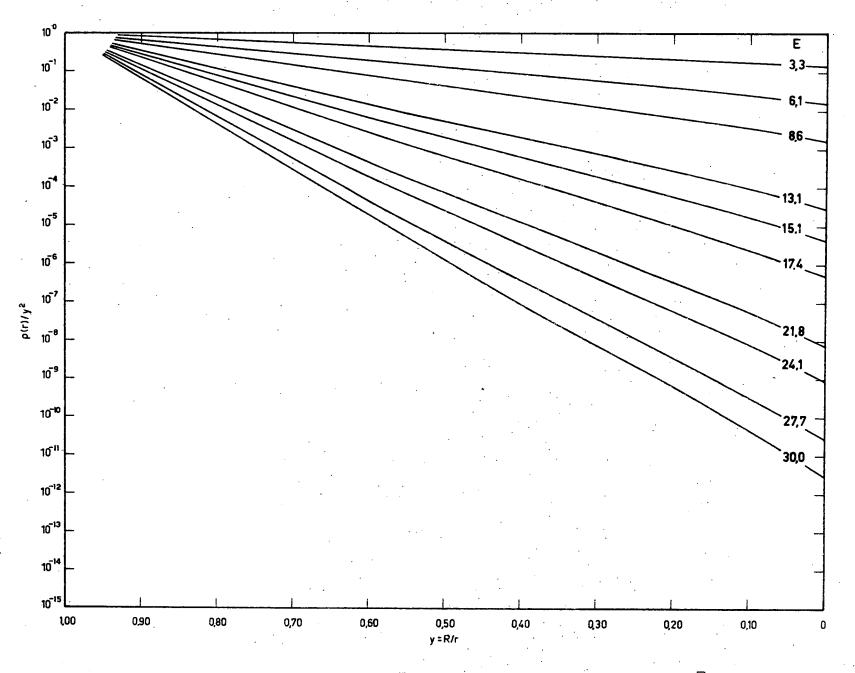


Fig. 3.- Comportement de la fonction  $y^{-2} \left[ e^{-E(1-y)} - (1-y^2)^{1/2} e^{-E/(1+y)} \right]$  pour différentes valeurs du paramètre E.

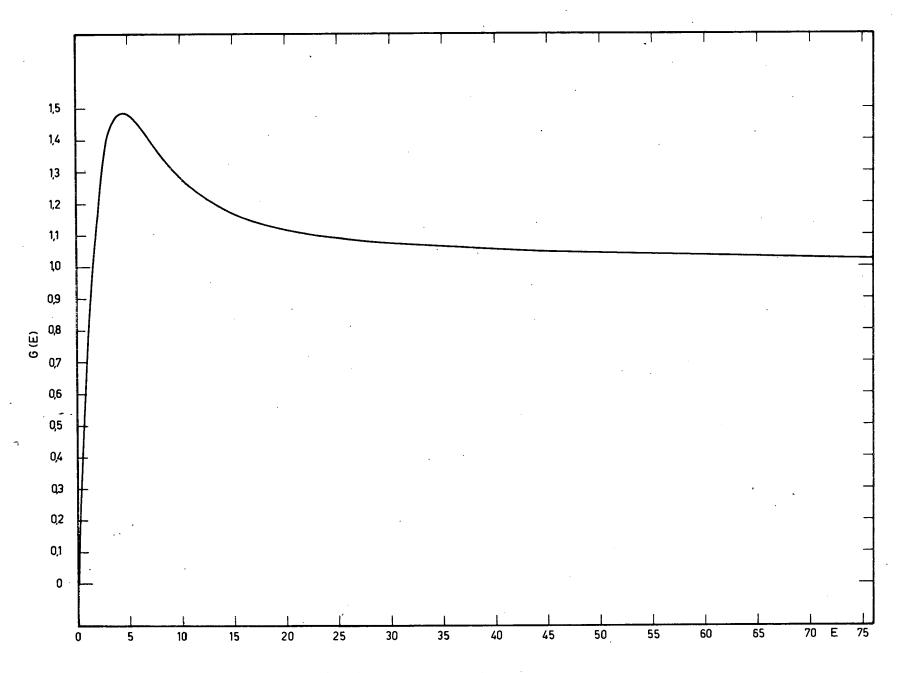


Fig. 4a.- Fonction G(E) pour  $E \le 75$ 

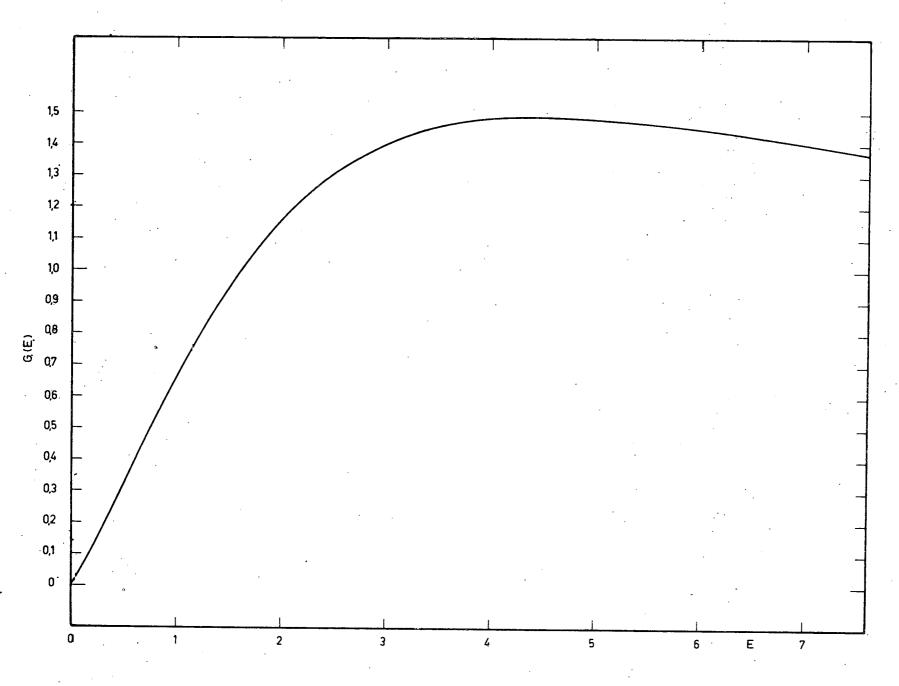


Fig. 4b.- Fonction G(E) pour  $E \le 7$ .

FONCTION G(E)

		,0	,1	,2	,3	,4	 ,5	,6	,7	8,	,9
0,	0,	00000	05985	12417	19151	26067	33064	40058	46980	53775	60398
1,		66814	72995	78921	84577	89955	95049	99857	*04380	*08621	*12586
2,	1,	16282	19716	22897	25836	28543	3 1027	33300	35371	37252	38954
3,		40485	41858	43080	44161	45111	45938	46651	47257	47766	48181
4,		48510	48761	48940	49051	49100	49094	49035	48929	48779	48590
5,		48366	48109	47823	47511	47175	46818	46442	46050	45644	45224
6,		44794	44355	43908	43457	42998	42535	42068	41600	41130	40660
7,		40190	39721	39253	38788	38325	37865	37408	36955	36506	36062
8,		35622	35186	34756	34331	33911	33496	33087	32683	32286	3 1893
9,		3 1507	31126	30751	30381	30018	29660	29307	28960	28619	28284
10,		27954	27629	27310	26996	26688	26385	26086	25793	25505	25222
11,		24944	24670	24401	24137	23877	23622	23371	23124	22882	22644
12,		22410	22180	21954	21731	21513	21298	21087	20879	20675	20474
13,		20277	20083	19892	19704	19520	19338	19160	18984	18812	18642
14,		18475	183 10	18148	17989	17832	17678	17527	17377	17230	17085
15,		16943	16803	16664	16528	16394	16262	16132	16004	15878	15754
16,		15632	15511	15392	15275	15160	15046	14934	14823	14714	14606
17,		14500	14396	14293	14191	14091	13992	<b>1389</b> 5	13798	13704	13610
18,		13518	13426	13336	13248	13 160	13074	12988	12904	12821	12738
19,		12657	12577	12498	12420	12343	12266	12191	12117	12043	11970

					FONCTION	G(E)	(Suite)	•	•		
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	1,	11899	11226	10624	10084	09597	09154	08751	08382	08043	07730
30		07441	07173	06923	06691	06474	06270	06079	05899	05729	05569
40		05418	05275	05139	05010	04887	04771	04659	04553	04452	04355
50		04262	04173	04087	04005	03927	03851	03778	03708	03641	03576
60		03513	03452	03393	03336	03281	03228	03177	03 127	03079	03032
70		02987	02943	02900	02859	02819	02780	02741	02704	02668	02633
80		02599	02566	02533	02501	02470	02440	02411	02382	02354	02327
90		02300	02274	02248	02223	02199	02175	02152	02129	02106	02084
	Ì										

.

Remarquons à présent que les intégrandes de  $I_2(E)$  et de  $I_3(E)$  convergent uniformément vers 0 quand E augmente indéfiniment.

Nous avons donc:

$$\lim_{E \to \infty} I_2(E) = \lim_{E \to \infty} I_3(E) = 0$$
 (51)

Pour  $\delta \leq y \leq 1$ , nous avons :

$$E e^{-E(1-y)} \le E \frac{e^{-E(1-y)}}{y^2} \le E \frac{e^{-E(1-y)}}{\delta^2}$$
 (52)

Après intégration, il vient :

$$1 - e^{-E(1-\delta)} \le I_1(E) \le \delta^{-2}[1 - e^{-E(1-\delta)}]$$
 (53)

et de là, nous tirons

$$1 \le \lim_{t \to 0} I_1(E) \le \delta^{-2} \tag{54}$$

De (47), (51) et (54), nous déduisons

$$1 \le \lim_{E \to \infty} G(E) \le \delta^{-2} \tag{55}$$

Enfin, nous pouvons choisir  $\delta$  aussi proche de 1 que nous le voulons. Nous avons donc :

$$\lim G(E) = 1$$

C'est ce que nous voulions démontrer.

### 8. Particules satellites.

Au n° 3, nous avons décidé de ne pas tenir compte des particules qui tournent autour de la terre sans jamais percer la base de l'exosphère.

Opik et Singer (3) d'une part, Brandt et Chamberlain (1) d'autre part ont discuté la question de savoir si le fait de négliger ces particules est physiquement admissible ou non. La justification du point de vue adopté ici reprend certains de leurs arguments.

Demandons nous d'abord comment une particule en provenance de la base de l'exosphère peut devenir une particule satellite. Il est évident

qu'une collision est nécessaire pour réaliser ce processus. Mais alors, le théorème de Liouville n'est pas applicable à ces particules et il est impossible de relier la distribution de leurs vitesses à la distribution au niveau R. Dans ce cas, la méthode utilisée jusqu'ici n'est plus valable. Rappelons maintenant une hypothèse faite précédemment, par laquelle nous supposions que les collisions étaient des événements rares dans l'exosphère. Ainsi, le formalisme tel qu'il a été développé ici peut s'appliquer à presque toutes les particules (en fait à toutes celles qui ne subissent aucun choc), ce qui signifie que les collisions n'influencent pratiquement pas la densité  $\rho(r)$ . Nous ne pouvons pas pour autant en déduire que la densité des particules satellites est négligeable. Elles se forment bien sûr en petit nombre mais elles peuvent rester très longtemps sur orbite.

Notre point de vue s'explique donc par le fait que la méthode utilisée est incapable de faire intervenir les particules satellites dans la densité  $\rho(r)$  et qu'en tout cas, leur influence sur la densité des quatre autres types (voir  $n^{\circ}3$ ) est insignifiante.

On peut objecter à la méthode adoptée ici d'être trop idéale. En effet, la définition du niveau de la base de l'exosphère contient une contradiction. D'une part, nous ne pouvons pas le fixer trop haut car nous avons supposé qu'au-dessous de ce niveau la distribution des vitesses était maxwellienne. Or, à grande altitude, les chocs deviennent très rares et ne permettent plus la réalisation d'une telle distribution. D'autre part, nous ne pouvons pas le fixer trop bas, sinon les collisions seraient encore trop fréquentes au-dessus et rendraient le théorème de Liouville inutilisable. Il importe donc de fixer ce niveau de façon à approcher le mieux possible la situation idéale que nous avons décrite.

Pour obtenir une expression plus correcte de la densité  $\rho(r)$ , le niveau de la base de l'exosphère devrait être remplacé par une zone dans laquelle les collisions sont de moins en moins fréquentes au fur et à mesure que l'altitude augmente.

# 9.- Méthode d'Opik et Singer

Nous avons déjà attiré l'attention sur la difficulté soulevée par le fait que la distribution des vitesses des particules arrivant à la base de l'exosphère avec une vitesse supérieure à la vitesse d'échappement n'est pas connue. Actuellement, deux façons seulement de faire intervenir ces particules dans la densité sont logiques:

- ou bien nous admettons que leur distribution complète celle des autres types de particules de façon à donner une distribution totale maxwellienne. C'est la méthode que nous avons adoptée jusqu'ici.
- ou bien nous n'en tenons pas compte et nous cherchons la densité relative des trois premiers types de particules seulement. C'est la méthode adoptée par ... Opik et Singer. Nous allons l'exposer ci-dessous.

Nous devons utiliser une distribution maxwellienne tronquée obtenue en supprimant dans la distribution maxwellienne complète la moitié des particules qui ont une vitesse supérieure à la vitesse d'échappement. Déterminons cette vitesse.

Une particule peut s'échapper du champ de pesanteur dès que son énergie cinétique est supérieure à son énergie potentielle. Au niveau R, cette condition s'écrit

$$\frac{v_0^2}{2} \ge g(R) R \tag{57}$$

Ou encore, d'après (19),

$$v \ge a \tag{58}$$

Ainsi, la distribution à employer est donnée par :

$$f(R,v_o) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv_o^2/2kT} \begin{cases} 1 & \text{si } v_o \leq a \\ 1/2 & \text{si } v_o \geq a \end{cases}$$
 (59)

Introduisons cette valeur dans (14). Nous obtenons, en utilisant les mêmes notations que précédemment :

$$J(\theta) = \frac{1}{8\pi} \frac{e^{-Eu^2 \left\{ (1 + 2 Eu^2) \left[ 1 + \Phi \cdot (x) \right] - x \Phi'(x) \right\}}}{(1 - y^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}$$
(60)

avec

$$x^2 = E(1-u^2)$$
 (61)

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_{0}^{x} e^{-t^2} dt$$
 (62)

$$\Phi'(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}} e^{-x^2}$$
 (63)

Portons cette valeur de  $J(\theta)$  dans (21). Nous obtenons, après avoir exprimé  $\theta$  en fonction de u :

$$\rho(r) = \frac{(1-y)^{1/2}}{2} \int_{(1-y)^{1/2}}^{(1+y)^{-1/2}} \frac{e^{-Eu^2} \left\{ (1+2 Eu^2) \left[ 1+\Phi(x) \right] - x\Phi'(x) \right\}}{u^2} du \quad (64)$$

L'intégrande est une différentielle exacte car

$$\frac{d}{du} \left\{ - \frac{e^{-Eu^{2}}}{u} \left[ 1 + \Phi(x) \right] + \frac{2}{\pi^{1/2}} e^{-E} \frac{x}{u} \right\}$$

$$= \frac{e^{-Eu^{2}} \left\{ (1 + 2Eu^{2}) \left[ 1 + \Phi(x) \right] - x\Phi'(x) \right\}}{u^{2}} \tag{65}$$

Et ainsi, la formule (64) mène directement au résultat suivant :

$$\rho(r) = \left(\frac{Ey}{\pi}\right)^{1/2} e^{-E} \left[ (1-y)^{1/2} - 1 \right] + \frac{1}{2} e^{-E(1-y)} \left\{ 1 + \Phi\left[ (Ey)^{1/2} \right] \right\} - \frac{1}{2} (1-y^2)^{1/2} e^{-E/(1+y)} \left\{ 1 + \Phi\left[ \left(\frac{Ey}{1+y}\right)^{1/2} \right] \right\}$$
(66)

Calculons  $\rho(\infty)$ . Nous avons y = 0. D'où

$$\rho(\infty) = 0 \tag{67}$$

Calculons  $\rho(R)$ . Nous avons y = 1. D'où

$$\rho(R) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \Phi(E^{1/2}) \right] - \left( \frac{E}{\pi} \right)^{1/2} e^{-E}$$
 (68)

Ce nombre est toujours plus petit que 1, car  $\rho(R)$  ne représente plus maintenant la densité relative totale, mais la fraction due aux trois premiers types de particules. La figure 5 présente la variation de  $\rho(R)$  pour ce dernier cas et il apparaît immédiatement d'après ce graphique ou d'après la formule (68) que la valeur limite de  $\rho(R)$  pour E augmentant indéfiniment est l. C'est dû à ce que la partie de la distribution maxwellienne supprimée pour obtenir la distribution tronquée devient de moins en moins importante quand E augmente.

Enfin, pour cette distribution de densité, il est possible de définir une fonction H(E) tout à fait analogue à la fonction G(E), (voir formule 41). Elles sont comparées à la figure 6 où on voit que la différence se manifeste pour les faibles valeurs de E.

### 10. Température dans l'exosphère

Après avoir examiné la distribution des particules dans l'exosphère, il convient d'avoir une idée de la répartition des vitesses. En fait, le théorème de Liouville nous permet déjà d'avoir une connaissance précise de la distribution des vitesses dans l'exosphère, mais il serait utile de savoir comment varie la température dans cette région. Avant d'aborder ce problème, rappelons que la notion classique de température perd son sens dès que les collisions deviennent très rares : il sera donc plus correct de parler de la vitesse quadratique moyenne des particules. Nous désignerons cette grandeur par  $\psi$ .

A l'altitude r, la vitesse quadratique totale des particules est donnée par :

$$\rho(\mathbf{r}) \ \psi(\mathbf{r}) = \int \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \ \mathbf{v}^2 \ \mathbf{d} \ \mathbf{V}$$
 (69)

Comme il a été expliqué au n° 2, cette intégrale peut encore s'écrire (en omettant encore les indices o):

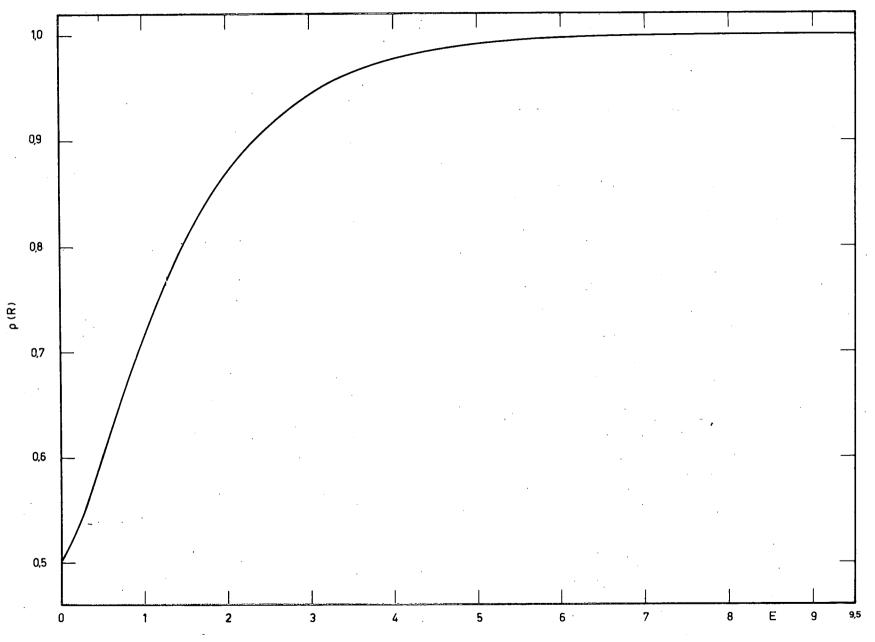


Fig. 5.- Variations de la densité relative  $\rho(R)$  au niveau critique selon  $\ddot{o}$ pik et Singer.

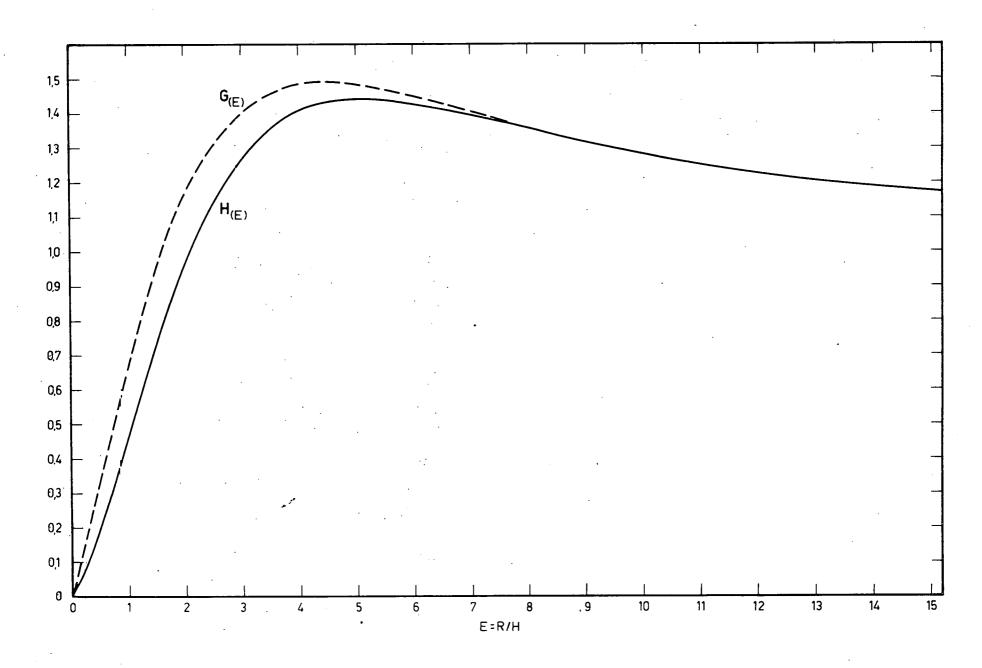


Fig. 6.- Valeurs comparées des fonctions G(E) et H(E).

FONCTION H(E)

		,0	,1	,2	,3	4 و	,5	,6	,7	,8	,9
ο,	ο,	00000	03070	06615	106 18	15027	19776	24800	30027	35402	40867
1,		46369	51861	57306	62668	67918	73033	77990	82776	87376	91783
2,		95989	99986	*03778	*07360	<b>*</b> 10735	<b>*139</b> 05	<b>*</b> 16875	*19449	*22230	*24628
3,	1,	26846	28893	30774	32498	34072	35504	36799	37965	39009	39939
4,		40760	41481	42 106	42642	43095	43470	43773	44009	44182	44298
5,		44360	44373	44340	44266	44153	44006	43827	43618	43384	43 125
6,		42845	42549	42232	41900	41551	41198	40830	40453	40068	39677
7,		39281	38880	38476	38069	37661	37251	36842	36431	36024	35616
8,		35211	<b>3</b> 4807	34406	34008	33614	33222	32835	32451	32072	31696
9,		31325	30959	30597	30240	29887	29540	29197	28859	28526	28198
10,		27875	27557	27244	26936	26632	26333	26039	25750	25466	25186
11,		24910	24639	24373	24111	23854	23600	23351	23 106	22865	22628
12,		22396	22167	21942	21720	21503	21289	21078	20871	20668	20468
13,		20271	20078	19887	19700	19516	19335	19156	18981	18809	18639
14,		18472	18308	18146	17987	17831	17677	17525	17376	17229	17084
15,		16942	16802	16664	16528	16394	16262	16132	16004	15878	15754
16,		15631	15511	15392	15275	15 160	15046	14934	14823	14714	14606
17,		14500	14396	14293	14191	14091	13992	13895	13798	13704	13610
18,	,	13518	13426	13336	13248	13 160	13074	12988	12904	12820	12738
19,		12657	12577	12498	12420	12343	12266	12191	12117	12043	11970

$$\rho(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = 4 \pi y^2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta K(\theta) d\theta$$
 (70)

avec

$$K(\theta) = \int_{\text{au}}^{\infty} \frac{f(R_{s}v) v^{3} \left[v^{2} - a^{2}(1 - y)\right]}{\left[v^{2}(1 - \sin^{2}\theta) - a^{2}(1 - y)\right]^{1/2}} dv$$
 (71)

Après avoir choisi pour f une distribution maxwellienne complète et après avoir effectué les mêmes changements de variables qu'au numéro 4, nous obtenons :

$$K(\theta) = \left(\frac{E}{\pi}\right)^{3/2} \frac{a^2 e^{-Eu^2}}{(1-y^2 \sin^2\theta)^{1/2}} \int_0^\infty e^{-Ez^2} \left[z^4 + z^2 (2u^2 + y - 1) + u^2 (u^2 + y - 1)\right] dz$$

$$= \left(\frac{E}{\pi}\right)^{3/2} \frac{a^2 e^{-Eu^2} \pi^{1/2}}{(1-y^2 \sin^2\theta)^{1/2}} \left[\frac{3}{8 E^{5/2}} + \frac{2u^2 + y - 1}{4 E^{3/2}} + \frac{u^2 (u^2 + y - 1)}{2 E^{1/2}}\right]$$

$$= \frac{a^2 e^{-Eu^2}}{8\pi E (1-y^2 \sin^2\theta)^{1/2}} \left[\left\{3 - 2E (1-y)\right\} \left\{1 + 2Eu^2\right\} - 2Eu^2 (1 - 2Eu^2)\right]$$
(72)

Portons cette dernière valeur dans la relation (70) et exprimons comme précédemment la variable  $\theta$  en fonction de u. Nous obtenons :

$$\rho(r)\psi(r) = \frac{a^{2}(1-y)^{1/2}}{2E} \left[ \left\{ 3-2E(1-y) \right\} \int_{(1-y)}^{(1+y)^{-1/2}} e^{-Eu^{2}} \frac{1+2Eu^{2}}{u^{2}} du \right]$$

$$-2E \int_{(1-y)}^{(1+y)^{-1/2}} e^{-Eu^{2}} (1-2 Eu^{2}) du \right]$$

$$= \frac{a^{2}\sqrt{(1-y)}}{2E} \left[ \left\{ 3-2E(1-y) \right\} \left( -\frac{e^{-Eu^{2}}}{u} \right) - 2Eu e^{-Eu^{2}} \right] \frac{(1+y)^{-1/2}}{(1-y)^{1/2}}$$

$$= \frac{a^{2}}{2E} \left\{ 3 e^{-E(1-y)} - \left( \frac{1-y}{1+y} \right)^{1/2} e^{-E/(1+y)} (3+3y+2Ey^{2}) \right\}$$

$$= \frac{a^{2}}{2E} \left\{ 3 \rho(r) - 2 \left( \frac{1-y}{1+y} \right)^{1/2} Ey^{2} e^{-E/(1+y)} \right\}$$

$$= \frac{a^{2}}{2E} \left\{ 3 \rho(r) - 2 \left( \frac{1-y}{1+y} \right)^{1/2} Ey^{2} e^{-E/(1+y)} \right\}$$

$$= \frac{a^{2}}{2E} \left\{ 3 \rho(r) - 2 \left( \frac{1-y}{1+y} \right)^{1/2} Ey^{2} e^{-E/(1+y)} \right\}$$

$$= \frac{a^{2}}{2E} \left\{ 3 \rho(r) - 2 \left( \frac{1-y}{1+y} \right)^{1/2} Ey^{2} e^{-E/(1+y)} \right\}$$

$$= \frac{a^{2}}{2E} \left\{ 3 \rho(r) - 2 \left( \frac{1-y}{1+y} \right)^{1/2} Ey^{2} e^{-E/(1+y)} \right\}$$

$$= \frac{a^{2}}{2E} \left\{ 3 \rho(r) - 2 \left( \frac{1-y}{1+y} \right)^{1/2} Ey^{2} e^{-E/(1+y)} \right\}$$

$$= \frac{a^{2}}{2E} \left\{ 3 \rho(r) - 2 \left( \frac{1-y}{1+y} \right)^{1/2} Ey^{2} e^{-E/(1+y)} \right\}$$

$$= \frac{a^{2}}{2E} \left\{ 3 \rho(r) - 2 \left( \frac{1-y}{1+y} \right)^{1/2} Ey^{2} e^{-E/(1+y)} \right\}$$

$$= \frac{a^{2}}{2E} \left\{ 3 \rho(r) - 2 \left( \frac{1-y}{1+y} \right)^{1/2} Ey^{2} e^{-E/(1+y)} \right\}$$

$$= \frac{a^{2}}{2E} \left\{ 3 \rho(r) - 2 \left( \frac{1-y}{1+y} \right)^{1/2} Ey^{2} e^{-E/(1+y)} \right\}$$

$$= \frac{a^{2}}{2E} \left\{ 3 \rho(r) - 2 \left( \frac{1-y}{1+y} \right)^{1/2} Ey^{2} e^{-E/(1+y)} \right\}$$

Finalement, nous avons:

$$\psi(r) = \frac{a^2}{2 E} \left\{ 3 - 2 \left( \frac{1-y}{1+y} \right)^{1/2} Ey^2 e^{-E/(1+y)} \rho^{-1}(r) \right\}$$
 (74)

Evaluons  $\psi(r)$  pour quelques valeurs de r.

 $1^{\circ}$  - Pour r = R, nous avons y = 1. D'où, nous obtenons,

$$\psi(R) = \frac{3a^2}{2E} = \frac{3kT}{m}$$

c'est-à-dire la définition de la vitesse quadratique moyenne.

 $2^{\circ}$  - Pour  $r = \infty$ , nous avons y = 0. D'où

$$\psi(\infty) = \lim_{y \to 0} \frac{\rho(r)\psi(r)}{y} \frac{y^2}{\rho(r)}$$

$$= \frac{a^2}{4E} \frac{e^{-E}(2E+3) \cdot 2}{e^{-E}(2E+1)}$$

$$= \frac{a^2}{2E} \frac{2E+3}{2E+1}$$

Ceci résulte directement des équations (21), (30), (70) et (72) où on pose y = 0 et u = 1.

Il est immédiat que la fonction  $\psi(r)$  décroft au fur et à mesure que r augmente. Il suffit de considérer la formule :

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) v^2 dV}{\int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) dV}$$

et de remarquer que v diminue avec l'altitude pour s'en convaincre.

#### 11. Méthode de Johnson et Fish.

Nous avons déjà insisté sur le fait que les deux méthodes exposées précédemment sont incapables de donner la densité des particules satellites. Conscients de ce défaut, Opik et Singer ont imaginé de calculer la valeur maximum de la densité des particules satellites grâce à un processus que nous

pourrions appeler processus de saturation. Leur idée est la suivante : en un point donné de l'exosphère, la densité des particules satellites ne peut pas être supérieure à la valeur de cette densité que donnerait une distribution maxwellienne. Cette idée peut être développée dans le cadre de la méthode décrite par Johnson et Fish. Nous allons l'exposer en la modifiant légèrement.

Tout d'abord, nous devons fixer comme précédemment le niveau de base de l'exosphère. Considérons ensuite en un point P donné de l'exosphère des particules douées de vitesses arbitraires et déterminons leurs trajectoires en supposant qu'aucune autre force que la gravitation n'agit sur elles. Nous pouvons alors classer ces particules en quatre groupes :

- 1°. Le premier groupe rassemble les particules qui ont une trajectoire elliptique perçant la base de l'exosphère (particules ballistiques).
- 2°. Le deuxième groupe rassemble les particules qui ont une trajectoire elliptique ne perçant pas la base de l'exosphère (particules satellites).
- 3°. Le troisième groupe rassemble les particules qui ont une trajectoire parabolique ou hyperbolique perçant la base de l'exosphère (particules hyperboliques non étrangères).
- 4°. Le quatrième groupe rassemble les particules qui ont une trajectoire parabolique ou hyperbolique ne perçant pas la base de l'exosphère ( particules hyperboliques étrangères).

Comparons cette nouvelle classification avec celle introduite au nº 3.

- Le premier groupe rassemble les particules quittant la base de l'exosphère ou y revenant, et dont les vitesses sont inférieures à la vitesse de libération. Elles correspondent aux types 1 et 2 de l'ancienne classification.
- Le troisième groupe rassemble les particules quittant la base de l'exosphère ou y revenant; et dont les vitesses ne sont pas inférieures à la vitesse de libération. Elles correspondent aux types 3 et 4 de l'ancienne classification.
- Les deuxième et quatrième groupes rassemblent les particules tournant autour de la terre ou se présentant dans son voisinage; mais dont les trajectoires ne percent jamais la base de l'exosphère. Ces groupes se partagent les particules du type 5 et l'ancienne classification.

Désignons respectivement par  $v_r$  et  $v_t$  les composantes radiale et transversale des vitesses des particules au moment où elles passent au point P. Nous allons déterminer dans le plan  $(v_r, v_t)$  le domaine de chacun des groupes définis cidessus.

Les équations du mouvement (6) et (7) peuvent s'écrire

$$v^2 - a^2 y = v_p^2 - a^2 y_p \tag{75}$$

$$rv \sin\theta = r v \sin\theta p$$
 (76)

Ici, les variables sont v, y, r et  $\theta$ . La présence d'un indice p signifie que la valeur de la variable qu'il accompagne est prise au point P. Cherchons d'abord le critère suivant lequel une trajectoire est elliptique, parabolique ou hyperbolique. Pour cela, plaçons nous à l'infini; autrement dit prenons y = 0. Suivant que  $v^2$  est négatif, nul ou positif, nous avons affaire à une particule dont la trajectoire est une ellipse, une parabole ou une hyperbole. Mais nous avons :

$$v^2 = v_0^2 - a^2 y_0$$
 (77)

Ainsi, nous avons les correspondances :

pour une trajectoire elliptique :  $v_0^2 < a^2y_0$  et

pour une trajectoire parabolique ou hyperbolique:  $v_0^2 = a^2 y_0$ 

Il nous resté encore à trouver le critère suivant lequel une trajectoire perce ou ne perce pas la base de l'exosphère. A cet effet, choisissons une vitesse  $\mathbf{v}_p$  et déterminons l'angle  $\theta=\omega$  pour lequel la trajectoire sera tangente à la sphère de rayon R. Suivant que l'angle  $\theta$  est plus grand ou plus petit que l'angle  $\omega$ , la trajectoire perce ou ne perce pas la base de l'exosphère.

Au point de tangence, nous avons évidemment :

$$y = 1$$
;  $\theta = \pi/2$ 

$$v^2 - a^2 = v_p^2 - a^2 y_p ag{78}$$

$$Rv = r v \sin \omega \tag{79}$$

Dès lors, nous obtenons facilement :

$$\sin^2 \omega = y_p^2 \frac{v_p^2 + a^2(1-y_p)}{v_p^2}$$
 (80)

Enfin, rappelons que

$$v_p^2 \sin^2 \omega = v_t^2 \tag{81}$$

$$v_{p}^{2} = v_{t}^{2} + v_{r}^{2}$$
 (82)

L'équation (80) donne

$$v_t^2 = y_p^2 \left[ v_t^2 + v_r^2 + a^2 (1-y_p) \right]$$
 (83)

et finalement, nous obtenons :

$$(1-y_p^2)v_t^2 - y_p^2 v_r^2 = a^2 y_p^2 (1-y_p)$$
 (84)

Dans le plan  $(v_t, v_r)$ , cette équation définit une hyperbole car en tout point P de l'exosphère, nous avons

$$0 < y_p < 1$$

A la figure 7 nous avons tracé dans le plan  $(v_r, v_t)$  les courbes correspondant à  $y_p = 1/4$ , 1/2 et 3/4 et définies par les équations

$$v_r^2 + v_t^2 = a^2 y_p$$

et

$$(1-y_p^2)v_t^2 - y_p^2 v_r^2 = a^2y_p^2(1-y_p)$$

Ces courbes délimitent les domaines  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  et  $D_4$  correspondant respectivement aux groupes 1, 2, 3 et 4. Remarquons que la disposition des domaines par rapport aux courbes est toujours la même. Ainsi, le domaine  $D_1$  est intérieur à la circonférence et à l'hyperbole, le domaine  $D_2$  est intérieur à la circonférence et extérieur à l'hyperbole, le domaine  $D_3$  est extérieur à la circonférence et intérieur à l'hyperbole, et le domaine  $D_4$  est extérieur à la circonférence et à l'hyperbole.

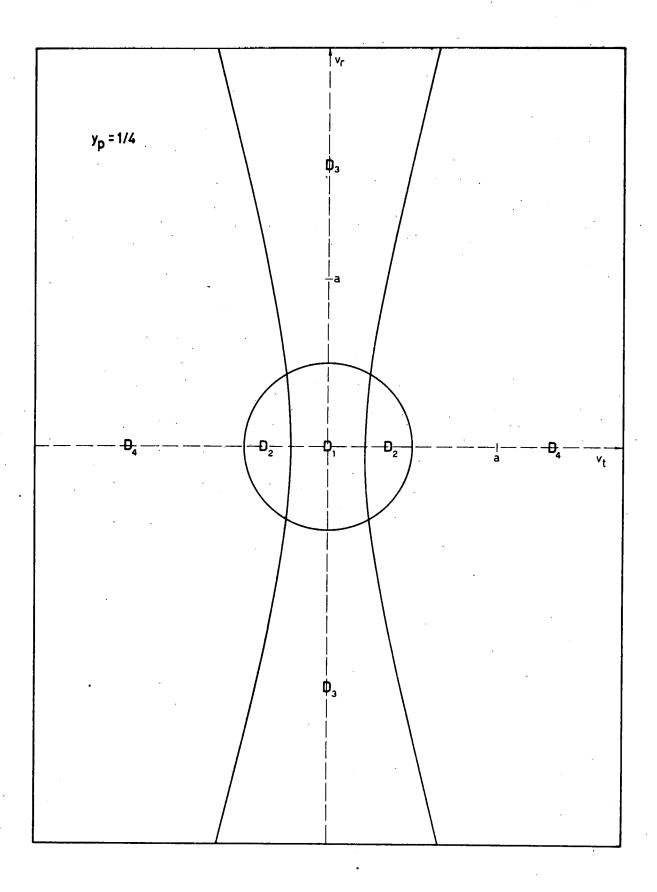


Fig. 7a.- Partage du plan  $(v_t, v_r)$  suivant les domaines  $D_1, D_2, D_3$  et  $D_4$  pour  $y_p = 1/4$ .

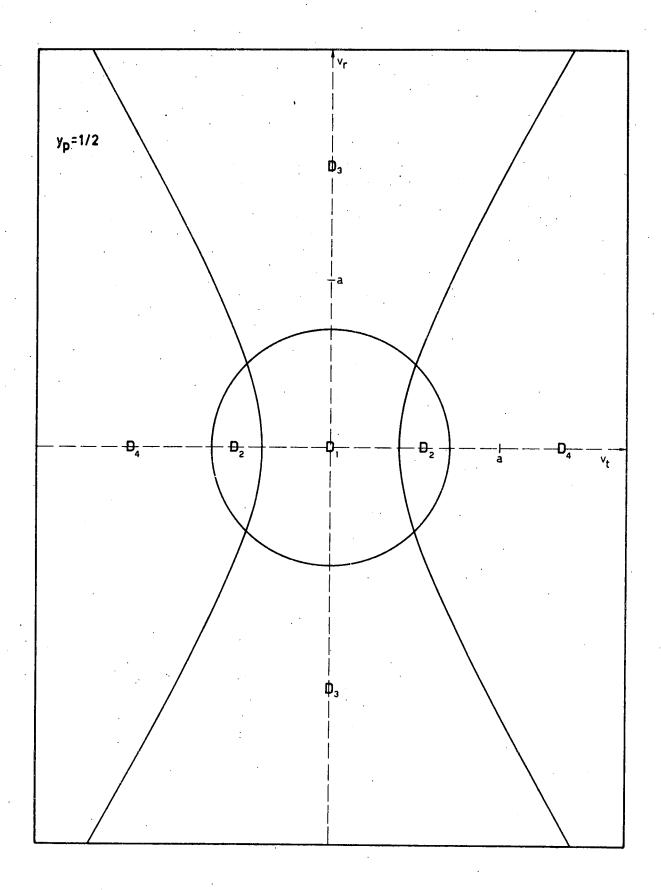


Fig. 7b.- Partage du plan  $(v_t, v_r)$  suivant les domaines  $D_1, D_2, D_3$  et  $D_4$  pour  $y_p = 1/2$ .

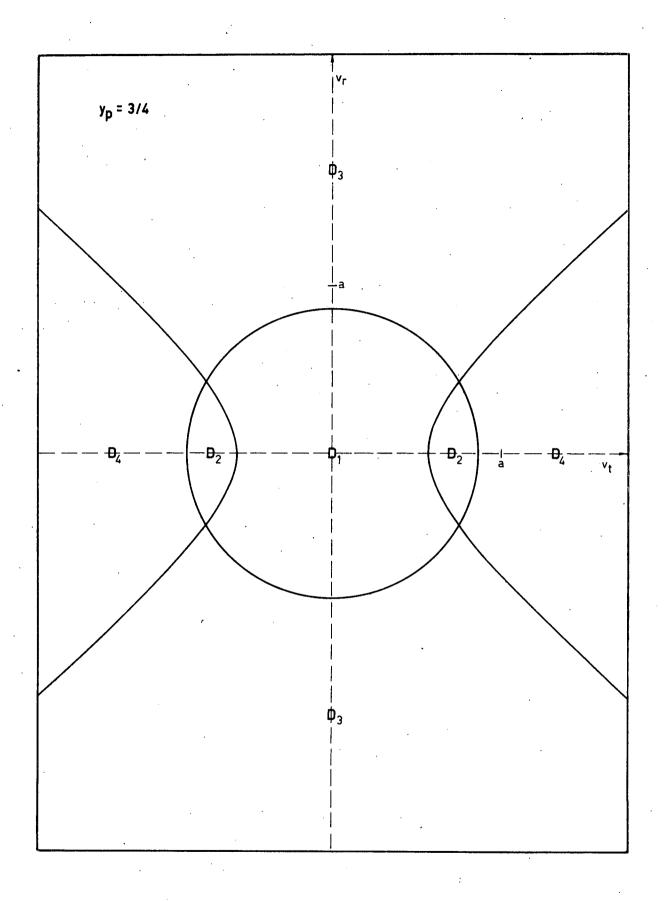


Fig. 7c. - Partage du plan  $(v_t, v_r)$  suivant les domaines  $D_1, D_2, D_3$  et  $D_4$  pour  $y_p = 3/4$ .

Signalons aussi que les figures 7a, 7b et 7c ont été tracées à la même échelle, mais nous n'avons pas spécifié la valeur choisie du paramètre a. Ainsi, ces figures peuvent être utilisées quel que soit le niveau critique R choisi.

Si nous choisissons maintenant une fonction de distribution de vitesse f, la contribution du i-ième groupe à la densité totale au point P est donnée par :

$$\rho_{\mathbf{i}}(\mathbf{P}) = \int_{\mathbf{D}_{\mathbf{i}}'} \mathbf{f}(\mathbf{P}) \ d\mathbf{V}$$
 (85)

Cette intégrale est à calculer sur le domaine  $D_i$  de l'espace des vitesses qui correspond au domaine  $D_i$  du plan  $(v_r, v_t)$ . Ici nous avons choisi, faute de mieux, une distribution maxwellienne uniforme.

$$f = (\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} \exp(-mv^2/2kT)$$
 (86)

Les calculs trop longs à reproduire ne seront pas détaillés ici. Les expressions des densités relatives obtenues sont :

$$\rho_{2} = (1-y^{2})^{3/2} e^{-Ey^{2}/(1+y)} \left\{ \Phi \left[ \left( \frac{Ey}{1+y} \right)^{1/2} \right] - \frac{2}{\pi^{1/2}} \left( \frac{Ey}{1+y} \right)^{1/2} e^{-Ey/(1+y)} \right\} (87,a)$$

$$\rho_{1} + \rho_{2} = \Phi \left[ (Ey)^{1/2} \right] - \frac{2}{\pi^{1/2}} (Ey)^{1/2} e^{-Ey} (87,b)$$

$$\rho_{4} = (1-y^{2})^{3/2} e^{-Ey^{2}/(1+y)} \left\{ 1 - \Phi \left[ \left( \frac{Ey}{1+y} \right)^{1/2} \right] + \frac{2}{\pi^{1/2}} \left( \frac{Ey}{1+y} \right)^{1/2} e^{-Ey/(1+y)} \right\} (87,c)$$

$$\rho_{3} + \rho_{4} = 1 - \Phi \left[ (Ey)^{1/2} \right] + \frac{2}{\pi^{1/2}} (Ey)^{1/2} e^{-Ey} (87,d)$$

Nous avons aussi

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = 1 \tag{88}$$

Ce résultat est tout à fait normal, étant donné la fonction f que nous avons choisie.

Nous donnons ci-après (voir fig. 8) quatre graphiques illustrant les variations des densités  $\rho_i$  pour différentes valeurs du paramètre E. Les résultats qui y sont résumés correspondent bien à ce qu'il était possible de prévoir intuitivement.

Pour obtenir la densité des particules satellites dans la théorie d'Opik et Singer, nous pourrions calculer  $\rho_2(r)$  que nous normerions grâce à la connaissance de  $\rho_1(r) + \rho_3(r)$ . Mais l'application d'un tel artifice est illusoire car les méthodes d'Opik et Singer d'une part, de Johnson et Fish d'autre part reposent sur des hypothèses non équivalentes. Ceci se voit le plus simplement en remarquant que l'utilisation du théorème de Liouville par les premiers est équivalente à la résolution de l'équation intégro-différentielle de Boltzmann dans laquelle les collisions sont négligées, tandis que la distribution maxwellienne utilisée par les seconds provient d'une solution de la même équation dans laquelle les collisions ne sont pas négligées et jouent même un rôle très important cette fois. Dans ce même ordre d'idées, et pour illustrer ce qui vient d'être dit, signalons que récemment, Aamodt et Case (1) ont résolu directement l'équation de Boltzmann sans collisions. Grâce à un choix judicieux des conditions aux limites, ils parviennent à ne considérer que les particules des trois premiers types de la classification introduite au numéro 3. Ils retrouvent ainsi les mêmes résultats que Herring et Kyle (1). Mais il est possible de modifier leurs conditions de façon à pouvoir tenir compte cette fois des quatre premiers types de particules. L'expression de la densité obtenue dans ce cas est alors identique à celle que nous avons calculée par l'intermédiaire du théorème de Liouville (voir formule (37)).

Terminons par une remarque. Nous avons introduit lors de la description de la méthode due à Johnson et Fish un groupe de particules dont nous n'avons pratiquement pas parlé auparavant, à savoir les particules hyperboliques étrangères (groupe 4). De telles particules existent, et sur ce point la méthode de Johnson et Fish l'emporte sur la méthode de Opik et Singer. Le gros reproche que nous pouvons adresser à la première est qu'elle utilise une distribution de vitesses maxwellienne, hypothèse qui n'est pas justifiée dans l'exosphère. Mais en fait, elle peut s'appliquer quelle que soit la

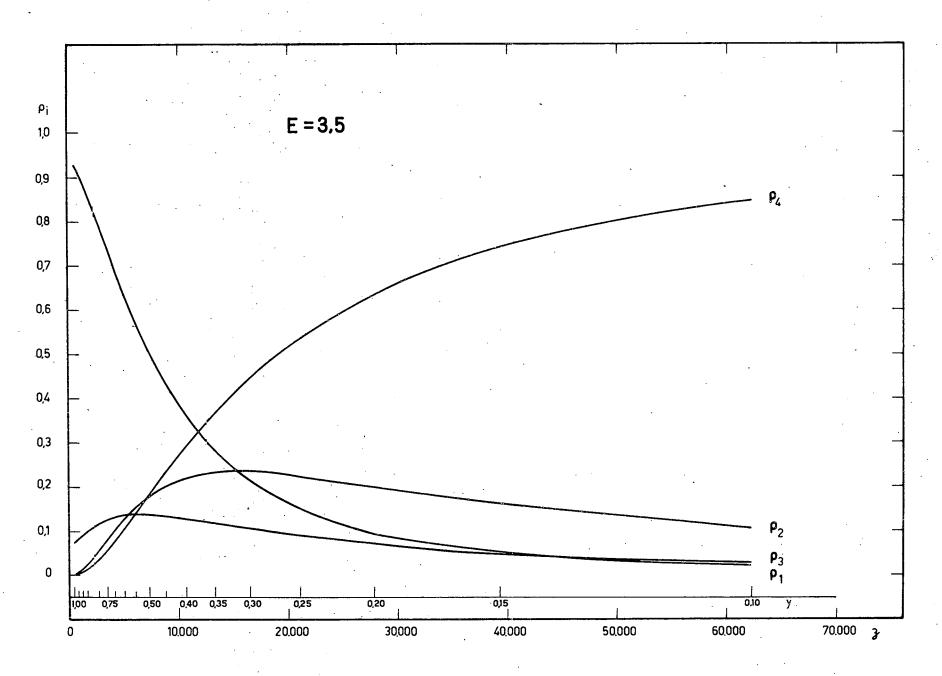


Fig. 8a. - Valeurs des concentrations  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$  et  $\rho_4$  pour E = 3,5.

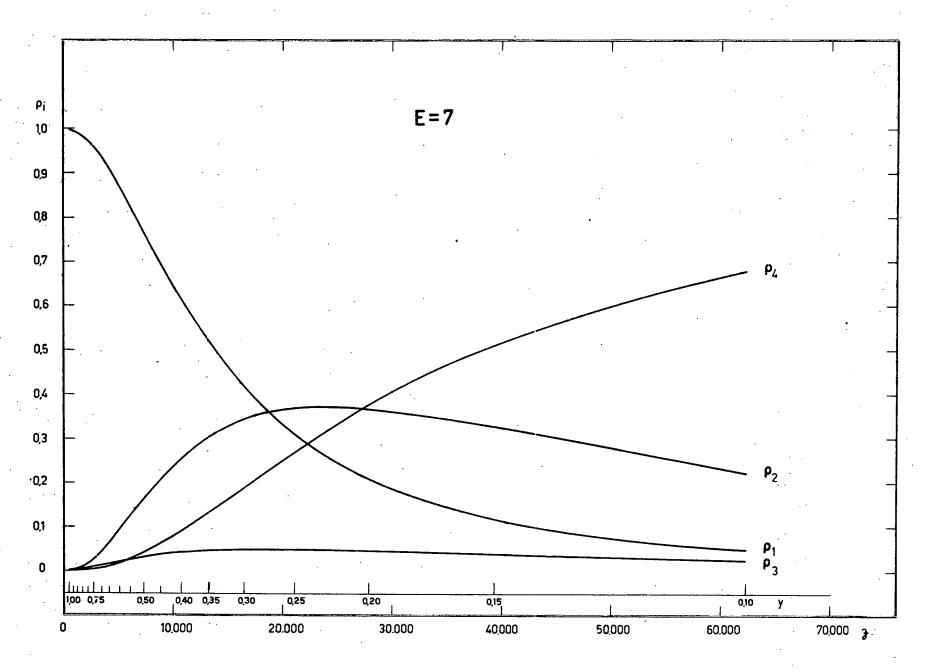


Fig. 8b.- Valeurs des concentrations  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$  et  $\rho_4$  pour E = 7.

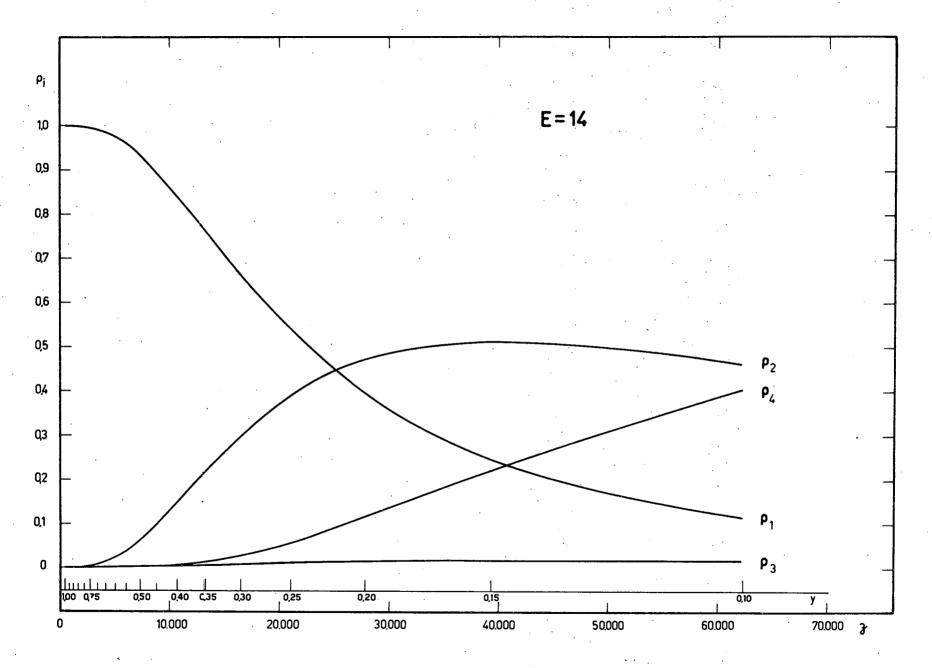


Fig. 8c.- Valeurs des concentrations  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$  et  $\rho_4$  pour E = 14.

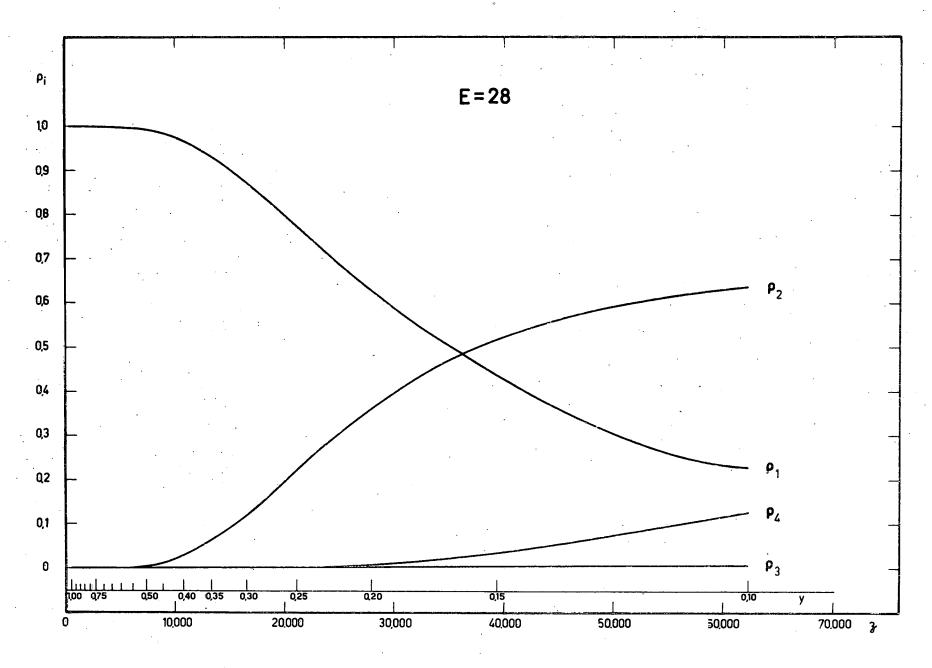


Fig. 8d.- Valeurs des concentrations  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$  et  $\rho_4$  pour E = 28.

distribution choisie. Le problème essentiel est donc de trouver la fonction de distribution de vitesse apte à décrire l'état de l'exosphère.

En présentant ce travail, j'ai le plaisir de remercier Monsieur le Professeur M. Nicolet qui m'a grandement aidé par ses conseils.

J'ose espérer que cet ouvrage rend hommage à sa science et à son enseignement qu'il n'a cessé de me prodiguer avec le plus grand dévouement. Je tiens aussi à remercier Monsieur G. Kockarts dont la collaboration me fut infiniment utile.

Ce travail a été effectué au Centre National de Recherches de l'Espace.

#### REFERENCES

- Aamodt, R.E. and Case, K.M., Density in a simple model of the exosphere, Phys. Fluids, 5, 1962, 1019-1021
- Brandt, J.E. and Chamberlain, J.W., Density of neutral gas in a planetary exosphere, Phys. Fluids, 3, 1960, 485-486
- Herring, J. and Kyle, L., Density in a planetary exosphere, J. Geophys. Res., 66, 1961, 1980-1982
- Johnson, F.S., The distribution of hydrogen in the telluric hydrogen corona, Astrophys. J., 133, 1961, 701-705
- Johnson, F.S. and Fish, R.A., The telluric hydrogen corona, Astrophys. J., 131, 1960, 502-515
- Opik, E.J. and Singer, S.F., Distribution of density in a planetary exosphere, Phys. Fluids, 2, 1959, 653-655; 3, 1960, 486-488; 4, 1961, 221-233