

INSTITUT D'AERONOMIE SPATIALE DE BELGIQUE

3 - Avenue Circulaire

B - 1180 BRUXELLES

## AERONOMICA ACTA

A - N° 149 - 1975

Méthode des moindres carrés

appliquée à la réduction des clichés astrométriques

par

H. DEBEHOGNE et E. VAN HEMELRIJCK

BELGISCH INSTITUUT VOOR RUIMTE-AERONOMIE

3 - Ringlaan

-B - 1180 BRUSSEL

## AVANT-PROPOS

"Méthode des moindres carrés appliquée à la réduction des clichés astrométriques" a été publié dans Acta Astronomica, 24, 309-317, 1974 de l'académie polonaise.

## FOREWORD

"Méthode des moindres carrés appliquée à la réduction des clichés astrométriques" was published in Acta Astronomica, 24, 309-317, 1974 of the academy of Poland.

## VOORWOORD

"Méthode des moindres carrés appliquée à la réduction des clichés astrométriques" werd gepubliceerd in Acta Astronomica, 24, 309-317, 1974 van de poolse academie.

## VORWORT

"Methodes des moindres carrés appliquée à la réduction des clichés astrométriques" wurde in Acta Astronomica, 24, 309-317, 1974 der polnische Akademie herausgegeben.

# METHODE DES MOINDRES CARRES APPLIQUEE A LA REDUCTION DES CLICHES ASTROMETRIQUES

par

H. DEBEHOGNE\* et E. VAN HEMELRUCK\*\*

\* *Observatoire Royal de Belgique, 1180 Bruxelles.*

\*\* *Belgisch Instituut voor Ruimte-Aëronomie, 1180 Brussel.*

## *Résumé*

Les formules de transformation polynomiales des coordonnées mesurées ( $x, y$ ) en coordonnées standard ( $X, Y$ ) donnent les équations normales par application de la méthode des moindres carrés.

Pour tester les formules, on utilise un nombre important d'étoiles-tests, c'est-à-dire qui n'interviennent pas dans la détermination des équations normales : ces étoiles-tests sont donc traitées comme des comètes ou des astéroïdes et comparées avec les catalogues. Les étoiles de référence sont également recalculées et comparées avec les catalogues. Les moyennes arithmétiques des écarts obtenus pour les deux groupes d'étoiles, portées en ordonnée, donnent les graphiques des erreurs interne (étoiles de base) et externe (étoiles-tests) pour des nombres croissants d'étoiles de référence (abscisse); lorsque les deux lignes se joignent, on obtient le nombre optimum d'étoiles de référence au delà duquel toute augmentation de ce nombre devient inutile. Ces graphiques donnent également la précision des calculs effectués à partir de l'instrument utilisé et au moyen des formules choisies. Les calculs portant sur l'erreur quadratique moyenne fournissent des enseignements très voisins.

Dans le cas des clichés des nuages artificiels créés en Sardaigne (1969) par l'Institut d'Aéronomie Spatiale de Belgique, pris avec une caméra de distance focale égale à 500 mm la formule polynomiale du troisième degré a donné d'excellents résultats.

### *Abstract*

The polynomial transformation formulae between the measured  $(x, y)$  and standard coordinates  $(X, Y)$  give the normal equations by application of the least squares method.

In order to check the formulae a great number of teststars are chosen, i.e. stars who are not involved by setting up the normal equations: these teststars are treated as comets or asteroids and compared with catalogue values. The same is done with the reference stars. The arithmetical means of the differences for the two groups of stars are set out in ordinate to get a graph of the internal (reference stars) and external (test stars) error versus number of reference stars (abscissas); at the junction of the two curves one obtains the optimal number of reference stars beyond which any increase of this number has no more sense. These graphs give also an idea on the accuracy of the calculations for a given instrument and a chosen formula. Computations related to the mean square error give also valuable informations.

On plates of artificial clouds, created by the "Institut d'Aéronomie Spatiale de Belgique" in Sardinia (1969) and taken by a 500 mm focus distance camera, the polynomial formula of the third degree has given excellent results.

### *Samenvatting*

De polynomiale transformatieformules tussen de gemeten  $(x, y)$  en de standaard-coördinaten  $(X, Y)$  geven de normaalvergelijkingen door toepassing van de methode van de kleinste kwadraten.

Om de formules te testen gebruikt men een groot aantal teststerren, t.t.z. sterren die niet tussenkomen bij het opstellen van de normaalvergelijkingen: deze teststerren worden behandeld zoals kometen of asteroïden en vergeleken met de catalogi. Ditzelfde gebeurt ook met de referentiesterren. De rekenkundige gemiddelden van de verschillen die men bekomt voor de twee sterrengroepen worden in ordinaat uitgezet zodat men grafieken bekomt van de inwendige (referentiesterren) en uitwendige fout (teststerren) in functie van een stijgend aantal referentiesterren (absis); wanneer de twee kurven samenvloeien bereikt men het optimaal aantal referentiesterren boven hetwelk elke verhoging van dit aantal geen zin meer heeft. Deze grafieken geven ook de nauwkeurigheid van de uitgevoerde berekeningen voor het gebruikte instrument en voor de gekozen formule. De berekeningen die betrekking hebben op de kwadratisch gemiddelde fout geven ook waardevolle inlichtingen.

In het geval van de platen van de kunstmatige wolken tot stand gebracht in Sardinië (1969) door het Belgisch Instituut voor Ruimte-Aëronomie en genomen met een camera met brandpuntsafstand 500 mm, heeft de polynomiale formule van de derde graad uitstekende resultaten gegeven.

### *Zusammenfassung*

Die polynomialen Transformationsformeln zwischen den gemessenen  $(x, y)$  und standard Koordinaten geben die Normalgleichungen durch Anwendung der Methode des kleinsten Quadraten.

Um die Formeln zu prüfen braucht man eine grosse Anzahl Teststerne, nämlich Sterne die nicht vorkommen beim Ansetzen der Normalgleichungen: diese Teststerne werden behandelt wie Kometen und Asteroiden und verglichen (wie auch die Referenzsterne) mit dem Katalogen. Die arithmetische Mittel der Differenzen der zwei Sternegruppen werden in Ordinaat ausgesetzt so dass man graphische Darstellungen bekommt von der inneren (Referenzsterne) und äusseren (Teststerne) Fehler als Funktion der Anzahl Referenzsterne (Abszissa); wenn die zwei Kurven sich nähern bekommen wir die optimale Anzahl Referenzsterne worüber jedere Erhöhung dieser Anzahl keine Bedeutung mehr hat. Diese graphische Darstellungen geben auch der Genauigkeit der gemachte Berechnungen für das angewendete Instrument und die gewählte Formel. Berechnungen mit Bezug auf der mittleren quadratischen Fehler geben auch wertvollen Informationen.

Bei photographischen Platten von künstlichen Wolken realisiert durch das "Institut d'Aéronomie Spatiale de Belgique" in Sardinien (1969) und fotografiert mit einer 500 mm brennweiten Kamera hatte die polynomial Formel dritten Grades ausgezeichneten Resultaten gegeben.

## 1. INTRODUCTION

Le programme pour déterminer par la méthode des moindres carrés, la direction d'un objet céleste (étoile, astre errant, nuage artificiel) à partir de clichés pris au moyen d'instruments de caractéristiques diverses et inconnues, a été élaboré avec quelques légères variantes pour les ordinateurs IBM 1800 (Institut d'Aéronomie Spatiale de Belgique) et IBM 360/44 (Institut Royal Météorologique de Belgique).

Les formules polynomiales utilisées ont reçu une désignation conventionnelle et ont été testées au moyen d'un groupe d'étoiles-tests.

La méthode des moindres carrés a été brièvement exposée d'un point de vue pratique, adapté au présent problème.

## 2. PRINCIPE GENERAL DE LA METHODE DE CALCUL

Ayant effectué les mesures  $x$  et  $y$ , on calcule les coordonnées standard  $X$ ,  $Y$  d'étoiles connues à partir de leurs coordonnées  $a$ ,  $\delta$  par les formules (Debehogne *et al.* 1972);

$$X = \cos \delta \sin (a - a_0) / A, \quad (1)$$

$$Y = [\sin \delta \cos \delta_0 - \cos \delta \sin \delta_0 \cos (a - a_0)] / A, \quad (2)$$

$$A = \sin \delta \sin \delta_0 + \cos \delta \cos \delta_0 \cos (a - a_0), \quad (3)$$

$a$  et  $\delta$  étant l'ascension droite et la déclinaison de l'étoile considérée,  $a_0$  et  $\delta_0$ , les coordonnées de l'étoile dont l'image est prise comme origine dans le plan des mesures.

Les formules de transformation des coordonnées mesurées ( $x$ ,  $y$ ) en coordonnées standard ( $X$ ,  $Y$ ) contiennent des constantes  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$  appelées constantes du cliché,

$$X = \sum_{i+j=0}^n a_{ij} x^i y^j, \quad Y = \sum_{i+j=0}^n b_{ij} x^i y^j, \quad (4), (5)$$

n entier positif, i et j entiers, positifs ou nuls, tels que  $i + j = k \leq n$  où j croît et i décroît. Cette convention permet de préciser aisément les termes, leur place et l'allure des formules, notamment quand certains  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$  sont pris nuls au départ (soit en vertu de considérations théoriques ou empiriques, soit dans un but de recherche expérimentale).

Parmi les formules de transformation prenons par exemple

$$X = \sum_{i+j=0}^2 a_{ij} x^i y^j, \quad Y = \sum_{i+j=0}^2 b_{ij} x^i y^j, \quad (6),(7)$$

c'est-à-dire :

$$\bar{X} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \quad (8)$$

$$\bar{Y} = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2. \quad (9)$$

La détermination des constantes du cliché ( $a_{00}, a_{10}, \dots, a_{02}$ ) comporte :

- l'établissement de N (nombre d'étoiles) équations de condition (ou d'observation), à partir des coordonnées x, y et  $\alpha, \delta$  (ou X, Y) de chaque étoile (appelée étoile de base ou de référence).

Pour N = 10, on a

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}y_1 + \dots + a_{02}y_1^2, \\ X_2 &= a_{00} + a_{10}x_2 + a_{01}y_2 + \dots + a_{02}y_2^2, \\ &\dots \dots \dots \\ X_{10} &= a_{00} + a_{10}x_{10} + a_{01}y_{10} + \dots + a_{02}y_{10}^2, \end{aligned} \quad (10)$$

- la formation d'autant d'équations normales qu'il y a de constantes du cliché (pour les formules (8-9) il y a 6 équations normales)



$$\begin{aligned}
[1]a_{00} + [x]a_{10} + [y]a_{01} + [x^2]a_{20} + [xy]a_{11} + [y^2]a_{02} &= [X], \\
[x]a_{00} + [x^2]a_{10} + [xy]a_{01} + [x^3]a_{20} + [x^2y]a_{11} + [xy^2]a_{02} &= [xX], \\
[y]a_{00} + [xy]a_{10} + [y^2]a_{01} + [x^2y]a_{20} + [xy^2]a_{11} + [y^3]a_{02} &= [yX], \quad (11) \\
[x^2]a_{00} + [x^3]a_{10} + [x^2y]a_{01} + [x^4]a_{20} + [x^3y]a_{11} + [x^2y^2]a_{02} &= [x^2X], \\
[xy]a_{00} + [x^2y]a_{10} + [xy^2]a_{01} + [x^3y]a_{20} + [x^2y^2]a_{11} + [xy^3]a_{02} &= [xyX], \\
[y^2]a_{00} + [xy^2]a_{10} + [y^3]a_{01} + [x^2y^2]a_{20} + [xy^3]a_{11} + [y^4]a_{02} &= [y^2X],
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
[1] &= N \times 1 = 10, \\
[x] &= x_1 + x_2 + \dots + x_{10}, \\
[y] &= y_1 + y_2 + \dots + y_{10}, \\
[x^2] &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2, \\
\dots\dots\dots & \\
[X] &= X_1 + X_2 + \dots + X_{10}, \\
[xy] &= x_1X_1 + x_2X_2 + \dots + x_{10}X_{10}, \\
\dots\dots\dots &
\end{aligned} \tag{12}$$

- la résolution des équations normales (qui fournissent les  $a_{ij}$ ). De la même façon on trouve les  $b_{ij}$ .

Les coefficients  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$  étant déterminés, on les utilise pour calculer l'ascension droite  $\alpha$  et la déclinaison  $\delta$ , soit

- d'une des étoiles de base;
- d'une étoile (appelée étoile-test) autre que celles utilisées pour établir les équations de condition;

- d'un objet céleste (astéroïde, comète, planète, satellite, nuage artificiel).

Après le calcul de X et Y pour un objet dont l'image a pour mesures x et y au moyen des formules (6-7), on détermine  $\alpha$ ,  $\delta$  par la transformation inverse de celle utilisée en début de programme pour passer des  $\alpha$ ,  $\delta$  aux X, Y, c'est-à-dire

$$\operatorname{tg}(\alpha - \alpha_0) = \frac{X}{\cos \delta_0 - Y \sin \delta_0}, \quad (13)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\cos(\alpha - \alpha_0) (\sin \delta_0 + Y \cos \delta_0)}{\cos \delta_0 - Y \sin \delta_0} \quad (14)$$

A la fin du programme, on détermine la moyenne arithmétique des écarts que les  $\alpha$  et  $\delta$  calculés présentent par rapport aux  $\alpha$ ,  $\delta$  des catalogues pour les étoiles de base et les étoiles-tests. Ceci donne une indication quant à la précision de la méthode de réduction.

### 3. DESIGNATION CONVENTIONNELLE D'UNE TRANSFORMATION

La transformation

$$\begin{aligned} X &= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + \boxed{a_{11}xy} + \boxed{a_{02}y^2} + a_{30}x^3 \\ &\quad + a_{21}x^2y + \boxed{a_{12}xy^2} + a_{03}y^3, \\ Y &= b_{00} + \boxed{b_{10}x} + b_{01}y + \boxed{b_{20}x^2} + \boxed{b_{11}xy} + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 \\ &\quad + \boxed{b_{21}x^2y} + \boxed{b_{12}xy^2} + b_{03}y^3, \end{aligned}$$

dans laquelle les termes encadrés seront supprimés, sera décrite: (3; 3,5; 5, 6, 9; 2, 4, 5, 8, 9). En général, si le degré maximum des polynomes X et Y vaut n, si K et L sont les nombres de termes omis dans ces polynomes et si  $n_{xk}$ ,  $n_{yl}$  représentent les numéros d'ordre de ces termes, la formule de transformation sera désignée simplement par

$$(n; K, L; n_{x1}, \dots, n_{xk}, \dots, n_{xK}; n_{y1}, \dots, n_{yk}, \dots, n_{yL}). \quad (15)$$

#### 4. APPLICATION

Ce programme a servi à déterminer de nombreuses positions d'astres errants, satellites, astéroïdes, phénomènes Apollo, comètes, nuages artificiels (Van Hemelrijck *et al.* 1972),... D'autre part, il a permis ou permettra de tester différents instruments de distance focale allant de 7 cm (caméra d'observation de nuages artificiels) et de 30 cm (caméra IGN de l'Institut Géographique National) à 700 cm (Télescope de Bosque Allegre-Argentine - Télescope australien), en passant par l'instrument de la carte du ciel de Cordoba Argentine (350 cm), l'Astrographe double de Zeiss et une bonne dizaine d'autres instruments dont la caméra IAS de 50 cm de distance focale qui nous intéresse plus particulièrement ici, aussi bien que différentes formules de transformation des coordonnées mesurées (x, y) en coordonnées standard (X, Y).

Ci-après figurent les graphiques des résultats obtenus sur quatre clichés de la caméra IAS pris à Valico Nuraxi et Monte Cardiga, en Sardaigne, lors de l'expérience S 64 de l'éjection de nuages artificiels par l'Institut d'Aéronomie Spatiale de Belgique (IAS) en 1969 (Ackerman *et al.* 1971). Les formules testées sont les suivantes : d'une part,

$$\begin{aligned} X &= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3, \\ Y &= b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{03}y^3, \end{aligned} \quad (16)$$

que nous désignons par (3; 3,3; 8, 9, 10; 7,8, 9) (fig. 1) : 3 car les formules sont de degré 3, 3 et 3 indiquant le nombre de termes manquant au polynôme complet de degré 3 pour X et Y, 8, 9, 10 donnant les numéros d'ordre des termes supprimés dans X, 7, 8 et 9 donnant les numéros des termes supprimés dans Y; d'autre part,

$$\begin{aligned} X &= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{03}y^3, \\ Y &= b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3, \end{aligned} \quad (17)$$

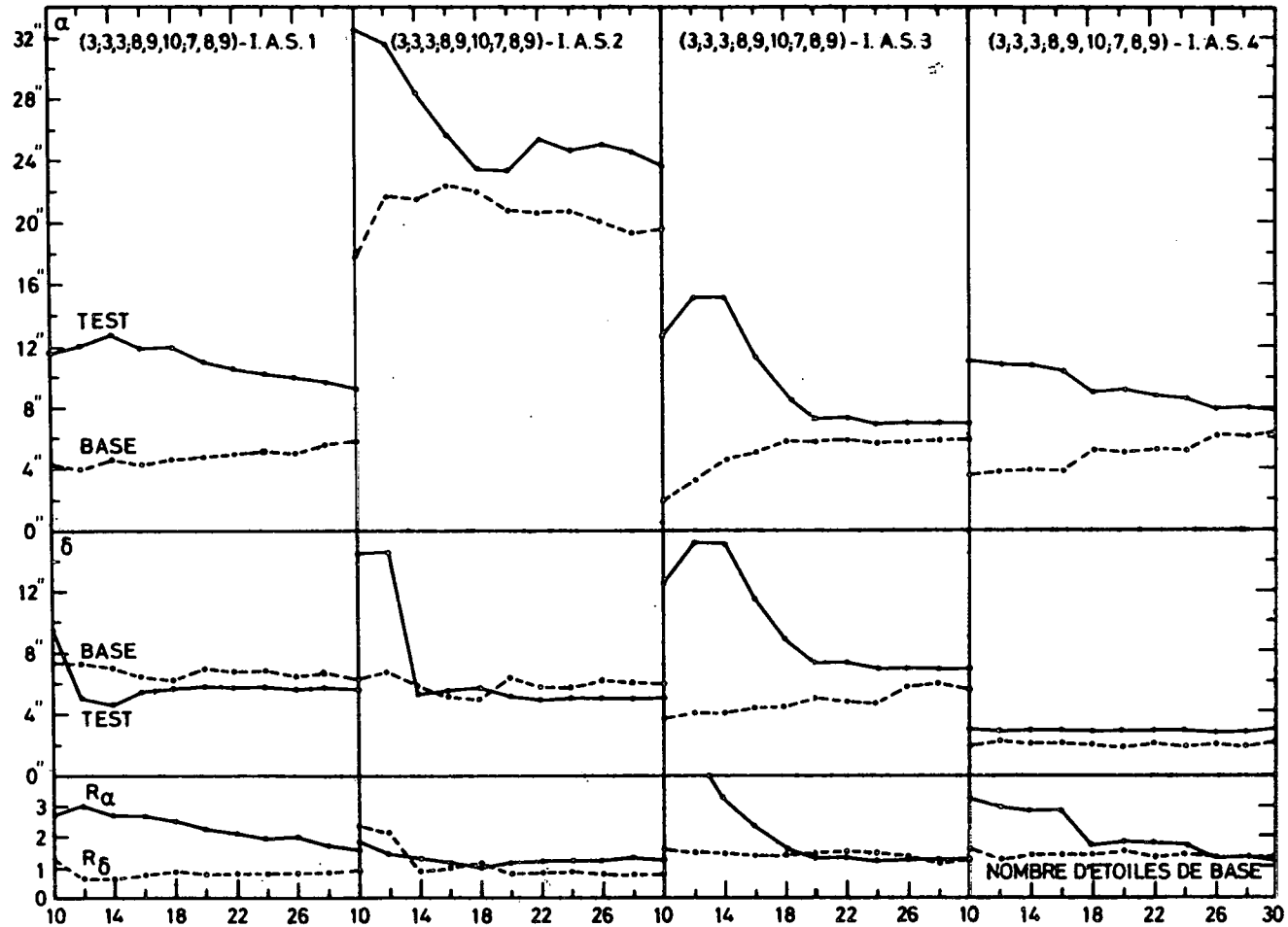


Fig. 1.- Etude cliché caméra IAS,  $f = 500$  mm,  $\phi = 100$  mm, champ :  $22^{\circ} \times 28^{\circ}$ .  
Formules testées (3; 3,3; 8, 9, 10; 7, 8, 9) :

$$X = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3$$

$$Y = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{03}y^3$$

Clichés testés : IAS 1, IAS 2, IAS 3, IAS 4 pris à Valico Nuraxi et Monte Cardiga (Sardaigne, 6 et 13 juillet 1969). En ordonnées : moyennes arithmétiques des résidus sur les étoiles de base et de test, en  $\alpha$  et  $\delta$ ; rapports  $R_{\alpha}$ ,  $R_{\delta}$  des moyennes obtenues en  $\alpha$  et  $\delta$ , sur les étoiles-tests aux moyennes obtenues sur les étoiles de base.

que nous désignons par (3; 3,3; 7, 8, 9; 8, 9, 10) (fig. 2). La méthode a déjà été exposée (Debehogne 1970). Rappelons-en l'essentiel. Sur chaque cliché, soixante étoiles environ ont été réparties dans deux groupes de trente. Un groupe a servi de groupe test; les coordonnées équatoriales ont été calculées et comparées aux coordonnées données dans les catalogues : les moyennes arithmétiques des résidus en  $\alpha$  et en  $\delta$  ont été portées en ordonnées sur les figures 1 et 2.

Ces calculs ont été effectués à partir de systèmes de constantes  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  déterminées par la méthode des moindres carrés au moyen d'un nombre croissant d'étoiles de référence (10, 12, 14, ... 30) prises dans le premier groupe. Ces nombres N d'étoiles de références sont en abscisses sur les graphiques.

Les moyennes arithmétiques des résidus en  $\alpha$  et en  $\delta$  pour les étoiles de référence (notées base) ont également été portées en ordonnées ce qui donne deux lignes (pour le test et la base) qui s'écartent, se croisent ou se chevauchent. L'important est de remarquer pour quelle valeur de N les deux lignes se superposent (aussi bien en  $\alpha$  qu'en  $\delta$ ). A ce moment on peut dire que l'on ne gagne plus rien à augmenter le nombre d'étoiles de référence. C'est là une première conclusion importante. Pour les formules (16) et (17) ce nombre optimum d'étoiles de référence vaut environ 18, soit deux fois et demie le nombre de termes (ou de constantes du cliché)  $a_{ij}$  ou  $b_{ij}$ .

Pour faciliter ce choix, les quotients R des moyennes des résidus pour les tests par les mêmes moyennes pour les bases ont été portés également en graphique.

Une seconde conclusion importante consiste à accorder la préférence aux formules (17) plutôt qu'aux formules (16). En effet, si les résultats sont à peu près équivalents pour trois des quatre clichés étudiés, il n'en va pas de même sur le troisième ou les meilleurs résultats (pour des nombres d'étoiles de références allant de 10 à 16) sont obtenus avec (17). Quant à l'important écart en  $\alpha$  sur le cliché IAS 2 nous l'expliquons par la mauvaise répartition des étoiles de référence. Il y a lieu, pour admettre les 8" comme moyenne arithmétique des écarts, de se rappeler que la caméra IAS est un instrument azimutal sans moteur

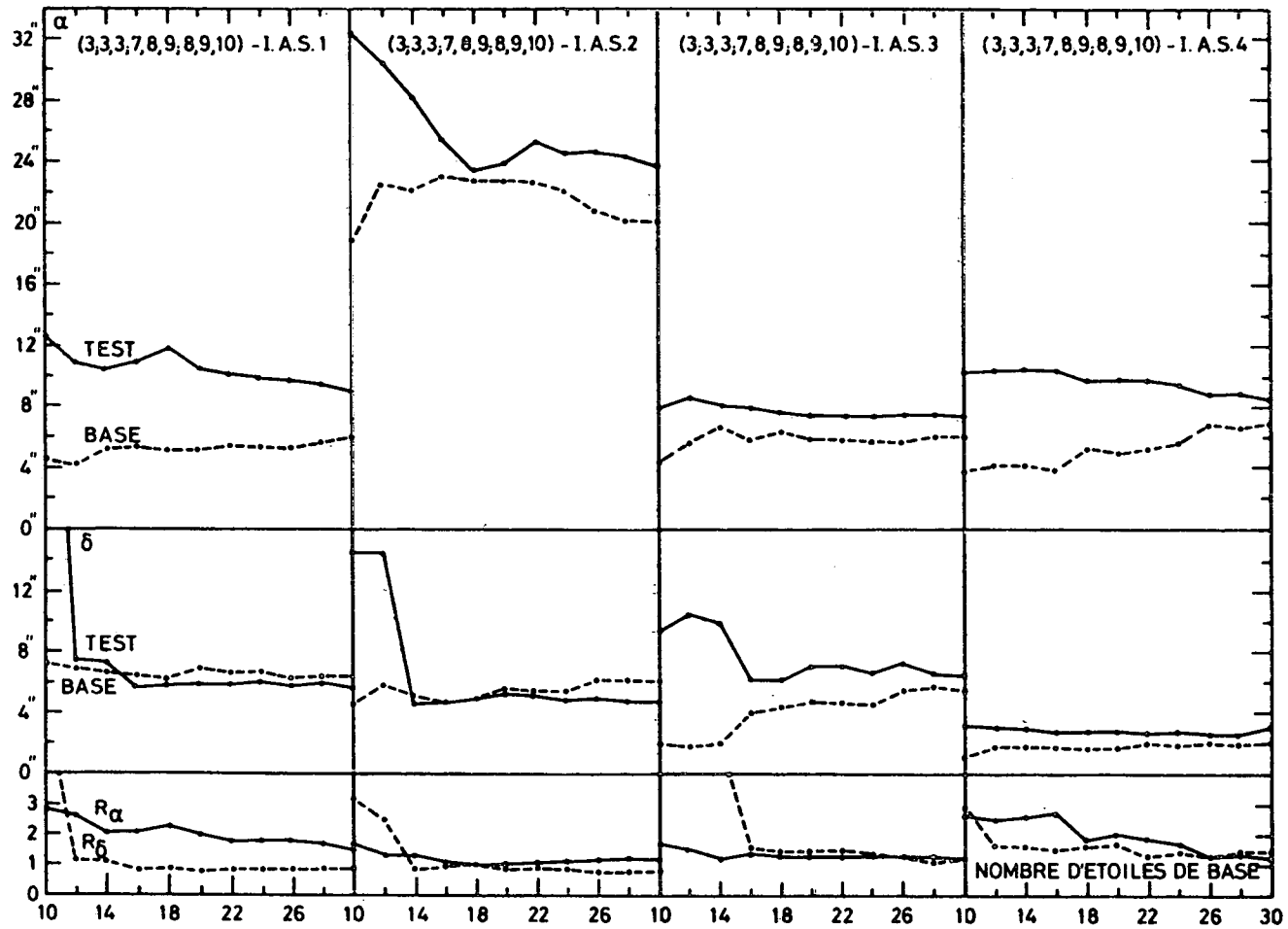


Fig 2.- Etude cliché caméra IAS,  $f = 500$  mm,  $\phi = 100$  mm, champ :  $22^0 \times 28^0$ .  
Formules testées (3; 3,3; 7, 8, 9; 8, 9, 10) :

$$X = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{03}y^3$$

$$Y = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{03}x^3$$

Clichés testés : IAS 1, IAS 2, IAS 3, IAS 4 pris à Valico Nuraxi et Monte Cardiga (Sardaigne, 6 et 13 juillet 1969). En ordonnées : moyennes arithmétiques des résidus sur les étoiles de base et ce test, en  $\alpha$  et  $\delta$ ; rapports  $R_\alpha$ ,  $R_\delta$  des moyennes obtenues en  $\alpha$  et  $\delta$ , sur les étoiles-tests aux moyennes obtenues sur les étoiles de base.

d'entraînement et que les poses sont de 5 minutes. D'autres formules ont déjà été testées, d'autres le seront encore. Dans l'état actuel des recherches, on peut prendre les formules homogènes du second degré. La remarque est importante car elle permettra d'accorder une confiance justifiée aux réductions des clichés IAS sur lesquels on disposera seulement d'un nombre relativement réduit (quinze à vingt) d'étoiles de référence.

Rappelons qu'une autre méthode d'investigation de la précision des réductions de cliché peut être développée à partir de réseaux d'étoiles fictives (Debehogne 1972).

Signalons également les travaux de Eichhorn *et al.* (1963).

### 5. CONCLUSION

Si chaque astrométriste accorde volontiers une préférence quasi définitive à une formule particulière, nous attirons cependant son attention sur les points suivants : une fois reconnue la précision souhaitée pour tel type de travail de réduction, une étude des résidus sur les étoiles-tests doit être effectuée dans chaque cas, les résultats des recherches antérieures servant de guides, mais non de modèles absolus; il apparaît dans les présents graphiques un nombre d'étoiles optimum, inutile à dépasser dans la pratique et dont la moyenne des valeurs absolues des résidus tend vers une horizontale dont l'ordonnée mesure la précision ultime du calcul.

*REFERENCES*

- Ackerman, M. and Van Hemelrijck, E. . 1971 *J. Geophys. Res.*, **76**, 3162.  
Debehogne, H. . . . . 1970 *Astron. and Astrophys.*, **8**, 189.  
. . . . . 1972 *Astron. and Astrophys. Suppl.*, **5**, 185.  
Debehogne, H. et Van Hemelrijck, E. . . 1972 *Bull. Acad. Roy. Belgique, Cl. Sc.*, **58**,  
513.  
Eichhorn, H. and Williams, C.A. . . . . 1963 *Astron. Jour.*, **68**, 221.  
Van Hemelrijck, E. et Debehogne, H. . . 1972 *Ciel et Terre*, **88**, 292.