

I N S T I T U T D ' A E R O N O M I E S P A T I A L E D E B E L G I Q U E

3 - Avenue Circulaire

B - 1180 BRUXELLES

AERONOMICA ACTA

A - N° 150 - 1975

Contribution au problème
de l'aberration différentielle
par

H. DEBEHOGNE et E. VAN HEMELRIJCK

B E L G I S C H I N S T I T U U T V O O R R U I M T E - A E R O N O M I E

3 - Ringlaan

B - 1180 BRUSSEL

AVANT-PROPOS

"Contribution au problème de l'aberration différentielle" a été présenté au "Colloque de l'Union Astronomique Internationale, n° 22" tenu à Nice en avril 1972. Ce texte sera publié dans "Studii si cercetari de Astronomi" de l'académie roumaine.

FOREWORD

"Contribution au problème de l'aberration différentielle" has been presented at the "Colloque de l'Union Astronomique Internationale, n° 22" held in Nice, april 1972. This paper will appear in "Studii si cercetari de Astronomi" of the roumanian academy.

VOORWOORD

"Contribution au problème de l'aberration différentielle" werd voorgedragen tijdens het "Colloque de l'Union Astronomique Internationale, n° 22" gehouden in april 1972 te Nice. Deze tekst zal uitgegeven worden in "Studii si cercetari de Astronomi" van de roemeense academie.

VORWORT

"Contribution au problème de l'aberration différentielle" wurde zum "Colloque de l'Union Astronomique Internationale, n° 22", April 1972 in Nice vorgestellt. Dieser Text wird in "Studii si cercetari de Astronomi" der rumänischen Akademie herausgegeben werden.

CONTRIBUTION AU PROBLEME DE L'ABERRATION DIFFERENTIELLE

par

H. DEBEHOGNE* et E. VAN HEMELRIJCK**

* Observatoire Royal de Belgique, 1180 Bruxelles.

**Belgisch Instituut voor Ruimte-Aeronomie, 1180 Brussel.

Résumé

L'aberration différentielle affectant les positions des images stellaires sur les clichés astrographiques est proportionnelle au carré de la distance au point principal, comme l'indiquent les formules établies ci-après.

A partir de ces formules, nous avons déterminé les aberrations différentielles annuelles maximales (entre le centre et le bord du cliché) pour des instruments de focales et de champs différents : caméras IGN (Institut Géographique National) et IAS (Institut d'Aéronomie Spatiale), astrographe double de Zeiss de distances focales respectives 30, 50 et 200 cm.

Abstract

The differential aberration affecting the position of stellar images on astrographic plates is proportional to the square of the distance to the centerpoint as proved by the formulae established in this paper.

By means of this formulae we have determined the differential annual maximum aberrations (between the center and the edge of the photographic plate) for instruments with different focal distances and fields : IGN (Institut Géographique National) and IAS camera (Institut d'Aéronomie Spatiale), double Zeiss astrograph. The focal distances are respectively 30, 50 and 200 cm.

Samenvatting

De differentiele aberratie, die de richting van de hemellichamen op de astrografische platen beïnvloedt, is evenredig met het kwadraat van de afstand tot het centerpunt, zoals de hiernavolgende opgestelde formules weergeven.

Uitgaande van deze formules hebben we de differentiele jaarlijkse maximale aberraties (tussen het centrum en de boord van de fotografische plaat) bepaald voor instrumenten waarvan de brandpuntsafstand en het veld verschillend zijn : IGN (Institut Géographique National) en IAS camera (Institut d'Aéronomie Spatiale), dubbele Zeiss astrograaf met brandpuntsafstanden van respectievelijk 30, 50 en 200 cm.

Zusammenfassung

Die Differentiaalaberration, die die Richtung des Himmelskörpers auf photographischen Platten beeinflusst, ist proportional zum Quadrat der Distanz zu dem Mittelpunkt, wie durch die Formeln in diesem Text bewiesen ist.

Mittelst diese Formeln haben wir die jährlichen, maximalen Differentiaalaberrationen (zwischen dem Mittelpunkt und dem Rand der photographischen Platte) für Instrumente mit verschiedenen Brennweiten und Fielden berechnet : IGN (Institut Géographique National) und IAS Kamera (Institut d'Aéronomie Spatiale), doppel Zeiss Astrograph. Die Brennweite sind respektive 30, 50 und 200 cm.

1. RAPPEL DE NOTIONS FONDAMENTALES

On sait qu'il existe différents types d'aberration. Nous ne considérerons pas ici l'aberration planétaire que les calculateurs d'orbite corrigent simplement en modifiant le temps des observations de Δt , temps mis par la lumière pour parcourir la distance planète-Terre. Nous étudierons les formes d'aberration qui influencent la position relative de l'astre sur le cliché. Dans les formules ci-dessous, seul le coefficient K de l'aberration annuelle interviendra; cependant, il n'y a pas de différence essentielle dans l'expression générale de ces formules si l'on introduit un coefficient tenant compte du mouvement relatif total de l'observateur.

Si avant d'effectuer la réduction proprement dite, l'on préfère appliquer la correction d'aberration aux coordonnées équatoriales, on pourra trouver les formules adéquates chez divers auteurs (Barlier 1968). Dans le présent travail, nous cherchons la formule de transformation des coordonnées mesurées en coordonnées standard qui convient le mieux pour résorber ce phénomène de l'aberration sans modifier les coordonnées équatoriales au préalable.

Soient (fig. 1) :

O , centre optique,

A_1 , image de l'astre observé si la vitesse de la lumière était infinie,

A_2 , image effective de l'astre sur le cliché,

V , vitesse de déplacement du cliché,

θ , angle du cliché avec OA_1 ,

$\alpha = 90^\circ - \theta$ (on a supposé la plaque perpendiculaire à l'axe optique),

$\theta_1 = 90^\circ - \alpha + K'$ (K' = angle d'aberration, à déterminer),

c , vitesse de la lumière.

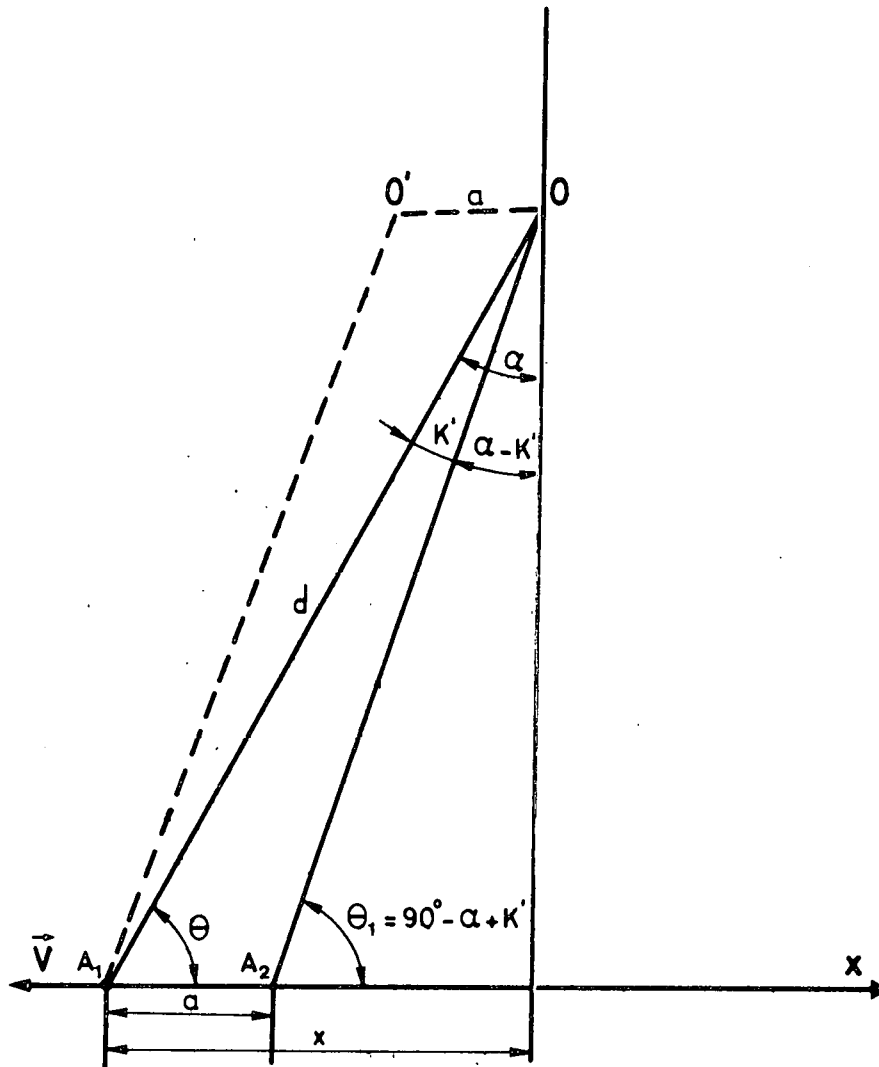


Fig. 1.- L'aberration exprimée directement en fonction des mesures. Le cliché A_1A_2 et le centre optique O se meuvent à la vitesse \vec{V} . Le rayon lumineux OA_1 n'est pas dévié pour un observateur fictif, fixé en A_1 . Or quand ce rayon arrive en A_1 , O s'est déplacé de a , en O' , et l'observateur interprète, pour cette nouvelle position O' du centre optique, le rayon OA_1 comme rayon initialement parallèle à $O'A_1$ et dévié en O . L'angle K' des rayons OA_1 et OA_2 donne l'aberration.

Un observateur fictif, fixe par rapport à un système absolu, placé en A_1 , reçoit le rayon réel (non réfracté car passant par O) suivant OA_1 . Or, quand ce rayon arrive en A_1 , O s'est déplacé de a (en O') et l'observateur croit, pour cette nouvelle position O' du centre optique, recevoir un rayon OA_1 initialement sur le prolongement de OA_2 , réfracté en O qui, pour lui, n'est plus centre optique.

$$\text{On a : } A_1A_2 = V(t_2 - t_1) = Vt_{21}, \quad (1)$$

t_{21} étant le temps mis par la lumière pour parcourir A_1A_2 .

Dans le triangle A_2A_1O :

$$\sin \widehat{A_2OA_1} = \frac{A_1A_2}{OA_2} \sin \theta_1 = \frac{Vt}{ct} \sin \theta_1 = \frac{V}{c} \sin \theta_1 \quad (2)$$

L'angle $\theta_1 - \theta$ étant très petit l'égalité (2) peut s'écrire :

$$\theta_1 - \theta = \frac{V}{c} \sin \theta_1 \quad (3)$$

$$\text{ou } \theta_1 - \theta = K \sin \theta_1 \quad (4)$$

Dans le cas du mouvement annuel la constante K (constante d'aberration annuelle) égale approximativement $20''{,}50$ (pour le calcul des éphémérides on a adopté $K = 20''{,}47$ depuis 1896 d'après la valeur de c admise à cette époque). Une détermination récente de K donne $20''{,}496$ (D.S. Evans, 1968).

L'aberration diurne ne peut être négligée dans certaines applications : la vitesse de rotation V_E d'un point de l'équateur terrestre s'exprimant par

$$V_E = \frac{2\pi R}{86164} = 0,4651 \text{ km/sec,}$$

la vitesse V_φ , à la latitude φ , se réduit à $V_\varphi = V_E \cos \varphi$ et on a, pour l'aberration correspondante, la constante

$$(K_d)_\varphi = \frac{V_\varphi}{c} = 0''320 \cos \varphi \quad (5)$$

2. ETUDE DU TERME PRINCIPAL DE L'EXPRESSION DE L'ABERRATION DIFFERENTIELLE

Nous allons exprimer l'aberration (qu'elle soit annuelle ou diurne) en série des coordonnées mesurées x, y , connaissant la projection \vec{V} du vecteur vitesse de déplacement de l'instrument dans le plan du cliché.

A. Cas particulier :

On suppose d'abord \vec{V} parallèle à l'axe des x .

1er cas : Effectuons le produit scalaire

$$\vec{V} \cdot \vec{x} = - |\vec{V}| |\vec{x}|$$

l'angle formé par \vec{V} et \vec{x} valant 180° .

Dans le triangle OA_1A_2 (fig. 1) où $x < 0$, l'effet a , de l'aberration sur x , s'exprime par :

$$a = d \frac{\sin K'}{\cos (\alpha - K')} \quad (6)$$

et $\theta_1 = 90^\circ - \alpha + K'$, (a est positif).

En développant $\cos (\alpha - K')$ et en tenant compte de $\cos \alpha = \frac{f}{d}$,
 $\sin \alpha = -\frac{x}{d}$, $d^2 = x^2 + f^2$, on obtient :

$$a = \frac{(x^2 + f^2) \operatorname{tg} K'}{f - x \operatorname{tg} K'}$$

soit, si f est pris pour unité de longueur,

$$a = \frac{(x^2 + 1) \operatorname{tg} K'}{1 - x \operatorname{tg} K'} \quad (7)$$

ou encore

$$a = \operatorname{tg} K' + \frac{x \operatorname{tg}^2 K' + x^2 \operatorname{tg} K'}{1 - x \operatorname{tg} K'} \quad (8)$$

En effectuant la division, il vient

$$a = \operatorname{tg} K' + x \operatorname{tg}^2 K' + x^2 \operatorname{tg} K' (1 + \operatorname{tg}^2 K') + \sum_{i=3}^{n-1} x^i (1 + \operatorname{tg}^2 K') \operatorname{tg}^{i-1} K' + \frac{x^n (1 + \operatorname{tg}^2 K') \operatorname{tg}^{n-1} K'}{1 - x \operatorname{tg} K'} \quad (9)$$

Si $x > 0$, on trouve également les formules (7) à (9)

2e cas : $\vec{V} \cdot \vec{x} = |\vec{V}| |\vec{x}|$ (l'angle de \vec{V} et \vec{x} vaut 0°)

On obtient :

$$a = \operatorname{tg} K' + \frac{x \operatorname{tg}^2 K' + x^2 \operatorname{tg} K'}{1 + x \operatorname{tg} K'} \quad (10)$$

$$a = \operatorname{tg} K' - x \operatorname{tg}^2 K' + x^2 \operatorname{tg} K' (1 + \operatorname{tg}^2 K') + (1 + \operatorname{tg}^2 K') \sum_{i=3}^{n-1} (-1)^i x^i \operatorname{tg}^{i-1} K' + \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 K') (-1)^n x^n \operatorname{tg}^{n-1} K'}{1 + x \operatorname{tg} K'} \quad (11)$$

D'après (6), où $\frac{a}{d} = K$ et tenant compte du fait que K' est petit ($\sin K' \approx K'$) et $\theta \approx \theta_1$, on a :

$$K' = K \sin \theta = \frac{K}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{d'où}$$

$$\operatorname{tg} K' = \operatorname{tg} \left(\frac{K}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \quad (12)$$

Le développement de $\operatorname{tg} K'$ donne :

$$\operatorname{tg} K' = \frac{K}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{K^3}{(\sqrt{x^2 + 1})^3} + \frac{2K^5}{15(\sqrt{x^2 + 1})^5} + \frac{17K^7}{315(\sqrt{x^2 + 1})^7} + \dots$$

et, en ne conservant que le premier terme de ce développement, il vient

$$\operatorname{tg} K' = \frac{K}{\sqrt{x^2 + 1}} = K \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} - \frac{5x^6}{16} + \dots \right)$$

D'après (11) où on néglige les termes en $\operatorname{tg}^2 K'$, $\operatorname{tg}^3 K'$, ..., on a finalement :

$$a = \operatorname{tg} K' + x^2 \operatorname{tg} K' \quad (13)$$

$$a = K \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8} x^4 - \frac{5}{16} x^6 + \dots \right) (1 + x^2)$$

$$a = K \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \dots \right) \quad (14)$$

et, en remplaçant K par $\operatorname{tg} K$, on obtient l'aberration différentielle :

$$a - \text{tg } K = \text{tg } K \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \dots \right) \quad (15)$$

Le tableau I donne les valeurs des divers termes utilisés dans le raisonnement ci-dessus :

1° le terme $x \text{tg}^2 K'$ de la formule (11) est réellement négligeable devant les termes

$$\text{tg } K' \text{ et } x^2 \text{tg } K' (1 + \text{tg}^2 K'),$$

2° l'aberration différentielle $a - \text{tg } K$ est proportionnelle à x^2 ce qui conduit à adopter une formule de transformation en x^2 et non en x .

3° pour les caméras IGN, IAS et pour l'astrographe double (AD) de Zeiss, les valeurs de l'aberration annuelle différentielle maximale se traduisent en sec. d'arc respectivement par 1", 0",6 et 0",05.

B. Cas général :

Les vecteurs \vec{V} et \vec{x} forment entre eux un angle β ; on a alors :

$$\vec{V} \cdot \vec{x} = |V| |x| \cos \beta$$

Dans les formules de transformation des coordonnées mesurées en coordonnées standard, il faut tenir compte d'une rotation égale à β :

$$\begin{aligned} X - x &= a_{00} + p_{22}(x^2 + y^2) + p_{44}(x^2 + y^2)^2 + f(x, y) \\ Y - y &= b_{00} + q_{22}(x^2 + y^2) + q_{44}(x^2 + y^2)^2 + f_1(x, y) \end{aligned} \quad (16)$$

ou, en tenant compte des termes en x et y de l'aberration différentielle,

$$X - x = a_{00} + p_{10}x + p_{22}(x^2 + y^2) + p_{44}(x^2 + y^2)^2 + f(x, y) \quad (17)$$

$$Y - y = b_{00} + q_{01}y + q_{22}(x^2 + y^2) + q_{44}(x^2 + y^2)^2 + f_1(x, y)$$

avec $f(x, y)$ et $f_1(x, y)$ fonctions exprimant les effets d'autres phénomènes que l'aberration et

$$a_{00} = \text{tg } K \cos \beta, \quad b_{00} = \text{tg } K \sin \beta,$$

$$|p_{10}| \approx K^2 \cos \beta \ll |p_{44}| \approx \frac{K}{8} \cos \beta < p_{22} \approx \frac{K}{2} \cos \beta \quad (18)$$

$$|q_{01}| \approx K^2 \sin \beta \ll |q_{44}| \approx \frac{K}{8} \sin \beta \ll |q_{22}| \approx \frac{K}{2} \sin \beta \quad (19)$$

Si \vec{V} n'est pas dans le plan du cliché, il faut introduire des cosinus directeurs et facteur.

4. CONCLUSION

Les formules de transformation des coordonnées mesurées en coordonnées standard, tenant compte de l'aberration différentielle, prendront donc la forme :

$$X = a_{00} + a_{10}x + p_{22}(x^2 + y^2) + p_{44}(x^2 + y^2)^2 + f(x, y) \quad (20)$$

$$Y = b_{00} + b_{01}y + q_{22}(x^2 + y^2) + q_{44}(x^2 + y^2)^2 + f_1(x, y),$$

où $f(x, y)$ et $f_1(x, y)$ représentent l'ensemble des termes relatifs aux autres phénomènes intervenant dans la déformation de la configuration stellaire sur le cliché.

TABLEAU I : Valeurs de l'aberration différentielle $a - \text{tg } K$ calculés par diverses formules.

x	a	tgK'	x tg ² K'	x ² tg K'(1+tg ² K')	a - tg K	$\frac{a - \text{tg } K}{x}$	$\frac{a - \text{tg } K}{x^2}$	$a = K + \frac{Kx^2}{2}$	$a = K + \frac{Kx^2}{2} - \frac{Kx^4}{8}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
0,05	0,994 10 ⁻⁴	0,992 10 ⁻⁴	0,492 10 ⁻⁹	0,248 10 ⁻⁶	0,973 10 ⁻⁷	0,194 10 ⁻⁵	0,389 10 ⁻⁴	0,995 10 ⁻⁴	0,995 10 ⁻⁴
0,07	0,995	0,991	0,687	0,485	0,215 10 ⁻⁶	0,308	0,440	0,996	0,996
0,075(AD)	0,996	0,990	0,736	0,557	0,251	0,335	0,446	0,996	0,996
0,09	0,997	0,989	0,881	0,801	0,372	0,414	0,460	0,997	0,997
0,11	0,999	0,987	0,107 10 ⁻⁸	0,119 10 ⁻⁵	0,568	0,516	0,469	0,999	0,999
0,13	1,001	0,985	0,106	0,166	0,801	0,616	0,474	1,002	1,002
0,15	1,004	0,982	0,144	0,221	0,107 10 ⁻⁵	0,714	0,476	1,004	1,004
0,17	1,007	0,979	0,163	0,283	0,137	0,810	0,476	1,008	1,008
0,19	1,010	0,976	0,181	0,352	0,171	0,904	0,476	1,011	1,011
0,21	1,014	0,972	0,198	0,428	0,209	0,996	0,474	1,015	1,015
0,23	1,018	0,968	0,215	0,512	0,250	1,086	0,472	1,020	1,019
0,25(IAS)	1,023	0,963	0,232	0,602	0,293	1,193	0,470	1,024	1,024
0,27	1,027	0,959	0,248	0,699	0,340	1,261	0,467	1,030	1,029
0,29	1,032	0,954	0,264	0,802	0,390	1,345	0,464	1,035	1,034
0,33(IGN)	1,043	0,943	0,293	0,102 10 ⁻⁴	0,497	1,507	0,456	1,047	1,046

Les colonnes 2 et 6 présentent les valeurs de l'aberration et de l'aberration différentielle.

Les colonnes 3, 4 et 5 donnent respectivement la tangente de l'angle d'aberration K' (en fonction de x) ainsi que le deuxième et le troisième terme de la formule (11), formule exprimant l'aberration.

Des colonnes 7 et 8, on constate que l'aberration différentielle n'est pas proportionnelle à x mais bien à x² avec une approximation suffisante.

Les colonnes 2, 9 et 10 montrent la précision des développements en série proposés pour l'aberration a, limiter aux deux et aux trois premiers termes.

Les coefficients K et K' désignent respectivement les coefficients d'aberration annuelle et l'angle d'aberration (fonction de x) ayant son sommet au centre optique de l'instrument (fig. 1).

BIBLIOGRAPHIE

- BARLIER, F., 1968, Méthode de réduction photographique utilisée à l'Observatoire de Meudon. Cas d'un cliché à grand champ, Cospar Transactions, 7, 217.
- EVANS, D.S., 1968, Observation in Modern Astronomy, The English Universities Press Ltd., 8.