

# Que nous apprennent les modèles météorologiques et climatiques simplifiés sur la prévisibilité à long terme de l'atmosphère ?

**Stéphane Vannitsem**

Institut royal météorologique de Belgique, Uccle, Belgique

svn@meteo.be

## Résumé

**La prévision de l'évolution du climat sur des échelles de temps allant de la saison à la décennie est un domaine qui suscite actuellement beaucoup d'intérêt. Dans cet article, nous explorons les conditions pour lesquelles nous pouvons nous attendre à avoir une prévisibilité à ces échelles de temps longues. Une série de modèles atmosphériques et climatiques relativement simples y sont étudiés en utilisant les outils de la théorie des systèmes dynamiques. Cette démarche a pour mérite de pouvoir analyser en détail leur dynamique et d'en inférer les caractéristiques essentielles permettant des prévisions à long terme. Il ressort de notre analyse qu'il ne suffit pas d'avoir un couplage de l'atmosphère avec les autres composantes (lentes) du système climatique pour avoir un accroissement de prévisibilité dans l'atmosphère, mais que de nouvelles solutions émergentes doivent naître de l'interaction entre ces différentes composantes.**

L'évolution des variables atmosphériques se distingue par des variations irrégulières d'un jour à l'autre. Ces variations donnent l'impression générale que l'évolution de l'atmosphère présente un caractère erratique. Cette impression est encore renforcée en suivant les prévisions météorologiques fournies chaque jour par les médias dont la qualité semble progressivement se dégrader et qui perd l'essentiel de son potentiel informatif pour des échéances au-delà de 10-15 jours. Cette dégradation de la qualité de la prévision est en fait une propriété intrinsèque des modèles que nous possédons pour simuler l'évolution de l'atmosphère, et ce quel que soit leur niveau de précision. Cette perte de prévisibilité est liée au fait que toute erreur commise sur les informations qu'on possède à un instant donné sur l'état de l'atmosphère – qui nourrissent les modèles – va s'amplifier au cours du temps. Cette propriété est connue comme la propriété de sensibilité aux conditions initiales. La figure 1 illustre ce comportement où plusieurs intégrations du modèle du Centre européen pour les prévisions météorologiques à moyen terme (CEPMMT), partant de conditions initiales légèrement différentes, fournissent différents scénarios d'évolution de variables atmosphériques. Ces scénarios

divergent progressivement les uns des autres au cours du temps en accord avec la propriété de sensibilité aux conditions initiales.

Les mathématiciens et les physiciens, déjà intrigués par cette propriété au début du XX<sup>e</sup> siècle, se sont penchés sur ce comportement et ont progressivement développé des outils permettant de comprendre cette évolution. La théorie qui s'intéresse à ce phénomène est celle du chaos déterministe, elle-même une branche de la théorie des systèmes dynamiques. Cette théorie et son importance en météorologie ont déjà fait l'objet d'un article dans *La Météorologie* (Royer et Nicolis, 1994) dans lequel un certain nombre de concepts fondamentaux sont décrits, ainsi que leurs applications à toute une série de modèles didactiques simples. Nous reviendrons sur certains de ces concepts par la suite.

Les modèles de prévision du temps se basent sur les équations fondamentales de la dynamique des fluides, de la thermodynamique et de la cinétique chimique, auxquelles s'ajoutent toute une série de relations décrivant les changements de phase de l'eau et les différents processus d'absorption, d'émission et de diffusion du rayonnement par les constituants présents dans l'air. L'une des

## Abstract

### What do we learn from simplified meteorological and climate models on the long-term predictability of the atmosphere?

The prediction of the climate evolution on seasonal to decadal time scales currently attracts a lot of interest. In this paper, we explore the conditions under which an extended-range predictability of the atmosphere can be expected on such long time scales. A set of relatively simple atmospheric and climate models are studied using tools from the dynamical systems theory. The merit of this approach is to allow for a detailed analysis of their dynamics and to infer the key features leading to extended-range predictability. It comes out of the analysis that it is not sufficient to have a coupling between the atmosphere and the other (slow) components of the climate system to get an increase of predictability within the atmosphere, but that new types of solutions should emerge from the interaction between these different components.

ECMWF Ensemble forecasts

Uccle, Belgium 50.82°N 4.45°E (ENS land point) 41 m

High Resolution Forecast and ENS Distribution

Tuesday 24 April 2018 00 UTC

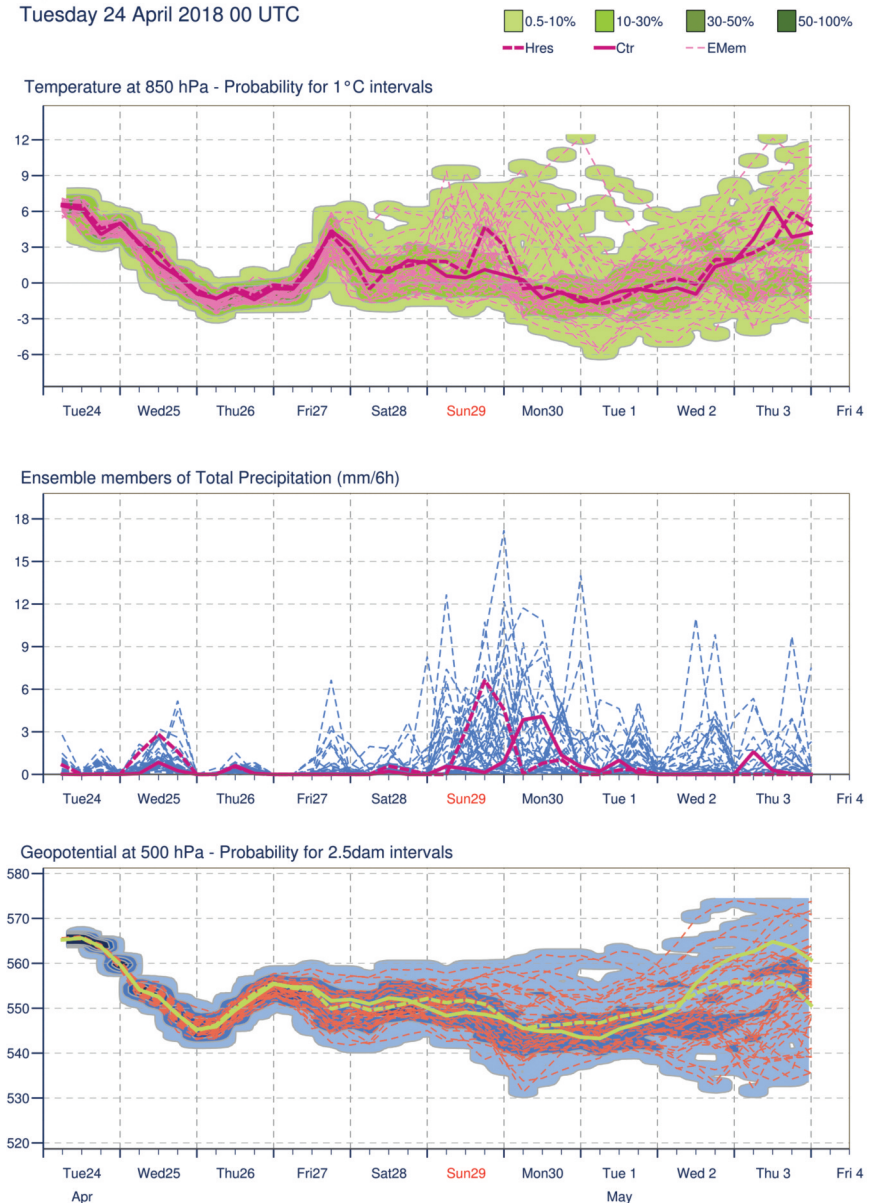


Figure 1. Prédiction d'ensemble à Uccle, Belgique, pour trois variables atmosphériques (la température à 850 hPa, les précipitations en 6 h et le géopotential à 500 hPa), émise le mardi 24 avril 2018 par le CEPMMT. Chaque tracé en pointillé correspond à une intégration (un scénario) partant de conditions initiales légèrement différentes. La ligne épaisse continue correspond à l'intégration de contrôle (sans perturbation de la condition initiale) et la ligne épaisse pointillée à l'intégration à haute résolution.

particularités essentielles de ces équations est qu'elles sont, par nature, non linéaires. C'est-à-dire que l'évolution du système n'est pas engendrée uniquement par une superposition de termes linéaires, mais est aussi soumise à des termes non linéaires contenant, par exemple, des produits entre les variables atmosphériques et leurs dérivées spatiales. Ces termes compliquent considérablement le problème de la prévision puisqu'aucune solution générale (analytique) n'est alors

disponible et qu'ils sont à l'origine de la propriété de sensibilité aux conditions initiales mentionnée plus haut.

Une fois que le modèle est établi, il est nécessaire de lui fournir une condition initiale, ainsi que des conditions aux bords du domaine considéré, en se basant sur les observations actuelles de l'atmosphère et de ses conditions aux limites. Ce programme est en place depuis des décennies et son succès pour des échéances de quelques jours à

quelques semaines et des échelles spatiales du kilomètre aux échelles planétaires n'est plus à démontrer (Kalnay, 2003 ; Pailleux *et al.*, 2015 ; Bouttier et Buizza, 2018).

De façon classique, on définit le climat comme l'ensemble des propriétés statistiques (moyennes, variances...) des différentes variables atmosphériques d'intérêt, telles que la température ou les précipitations. Pour décrire l'évolution de ces nouvelles variables, il faudrait, pour bien faire, établir de nouvelles équations d'évolution pour ces quantités. Mais une théorie complète de la manière dont il faut construire les équations d'évolution du système climatique n'est pas encore disponible, et ce surtout en raison de la présence de non-linéarités et de la complexité du

système climatique (Nicolis et Nicolis, 1995 ; Nicolis, 2016). Ceci implique que des approches relativement phénoménologiques sont utilisées, induisant un degré d'incertitude important sur la qualité des modèles et la présence de sources importantes d'erreurs de modélisation. Aujourd'hui, la description de sa dynamique part, en pratique, des mêmes équations de base que celles utilisées pour la prévision du temps. On y ajoute des couplages aux autres composantes du système climatique, à savoir l'hydrosphère, la cryosphère, la lithosphère et la biosphère qui interagissent avec l'atmosphère, ainsi que des forçages à variations lentes tels que les émissions de gaz à effet de serre ou encore les variations des paramètres orbitaux de la Terre. Dans ce contexte, l'une

des difficultés majeures réside dans la modélisation précise des flux de toute nature échangés entre les différentes composantes du système climatique. Lorsqu'on s'intéresse à l'évolution à long terme de ces quantités statistiques, on parle de projections climatiques.

Les deux approches mentionnées ci-dessus pour les temps courts et les temps longs constituent deux situations extrêmes, avec d'un côté une prévision dépendant considérablement de l'état initial du système et de l'autre une projection ne s'intéressant qu'aux propriétés statistiques du système indépendamment de ses conditions initiales. Des travaux récents tentent, en parallèle, d'utiliser les modèles climatiques en mode de prévision sur des échelles de temps intermédiaires, allant du mois à la décennie. On parle alors de prévision climatique (Cassou et Mignot, 2013). Le développement d'une telle approche nécessite néanmoins de savoir par avance si le jeu en vaut la chandelle et donc de comprendre quelle est la prévisibilité du système Terre à ces échelles de temps.

Dans cet article, nous allons nous efforcer de clarifier cette question et de voir sous quelles conditions l'atmosphère aux latitudes moyennes peut être prévue sur des échelles de temps allant de la saison à la décennie. Pour ce faire, nous allons adopter une approche basée sur les outils de la théorie des systèmes dynamiques et nous nous focaliserons sur une série de systèmes simples pour lesquels une description détaillée de la dynamique peut être extraite. Cette démarche, loin d'entrer en concurrence avec les analyses effectuées à partir de modèles climatiques beaucoup plus sophistiqués, permet d'orienter et d'ouvrir de nouvelles lignes de recherche sur la dynamique de l'atmosphère et du climat.

## 1. La dynamique de l'erreur

La prévisibilité du temps est aujourd'hui limitée à quelques semaines. La limite est souvent mesurée comme le temps moyen nécessaire pour arriver à un niveau d'erreur au-delà duquel l'utilisateur considère que la prévision devient inutile. De manière très schématique, on peut décrire l'évolution de l'erreur moyenne (erreur quadratique moyenne ou bien sa valeur absolue), notée  $E$ , d'un système dynamique présentant des solutions ayant une dynamique chaotique sous la forme (Lorenz, 1982 ; Nicolis 1992) :

$$\frac{dE}{dt} = \alpha E \left( 1 - \frac{E}{E_\infty} \right) \quad (1.1)$$

Cette équation porte le nom d'équation logistique et a été introduite par Pierre François Verhulst au début du XIX<sup>e</sup> siècle. C'est un modèle prototype dans bon nombre de domaines allant de la dynamique des populations à la chimie. En regardant cette équation, on peut déjà se rendre compte que si l'erreur est petite à un instant donné, le second terme dans la parenthèse du membre de droite peut être négligé et l'évolution de l'erreur sera dominée par une croissance exponentielle de la forme  $E(t) = E(0)e^{\alpha t}$ , où  $E(0)$  est l'erreur moyenne à l'instant initial  $t = 0$  et  $\alpha$  le taux de croissance de l'erreur moyenne. Si par contre l'erreur moyenne est grande et proche de  $E_\infty$ , le terme entre parenthèses est proche de 0 et les variations de l'erreur moyenne sont faibles. Cette erreur subit une saturation asymptotique à la valeur  $E_\infty$ . La solution analytique dans le cas général est donnée par :

$$E(t) = E_\infty \frac{1}{1 + \left( \frac{E_\infty}{E(0)} - 1 \right) e^{-\alpha t}} \quad (1.2)$$

et représentée à la figure 1.1. On peut alors définir un seuil lié à l'utilité de la prévision, qui dépend de la précision désirée par l'utilisateur. Cette courbe logistique fournit un modèle très simplifié qui nécessite de nombreux amendements si on souhaite l'appliquer à un système chaotique simple ou si l'on s'intéresse à la dynamique de l'erreur d'un modèle réaliste de prévision par rapport à la réalité (Royer *et al.*, 1994). Mais les ingrédients essentiels de croissance rapide initiale, d'évolution linéaire et de saturation de l'erreur sont génériques pour la dynamique de l'erreur des modèles réalistes de prévision du temps.

Dans le cadre mathématique plus rigoureux du chaos déterministe, l'amplification initiale des erreurs est souvent décrite par les exposants de Lyapunov, qui nécessitent de prendre la limite pour des erreurs infinitésimales. Ce concept, qui sera ensuite utilisé pour l'analyse des différents modèles, est introduit à l'encadré 2.

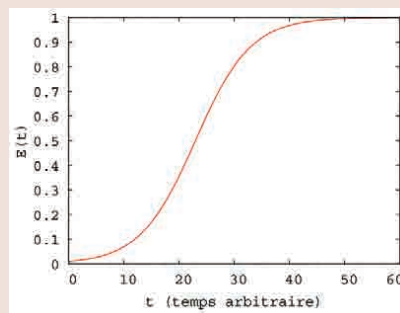


Figure 1.1. Courbe théorique de l'évolution de l'erreur telle qu'elle est décrite par l'équation (1.1) pour  $E_\infty = 1$ ,  $E(0) = 0,01$  et  $\alpha = 0,2$ .

## Modélisation simplifiée de l'atmosphère et du climat

La dynamique de l'atmosphère (et du système climatique) est régie par des équations de conservation non linéaires qui dépendent de l'espace et du temps. Pour les résoudre, il faut les intégrer

numériquement sur des calculateurs puissants et elles doivent donc être discrétisées à la fois dans l'espace et le temps. La discrétisation dans l'espace peut se faire de plusieurs manières, et l'une d'entre elles, très populaire, consiste à développer les solutions des équations en un ensemble fini de fonctions orthogonales dépendant de l'espace. Les coefficients multipliant ces fonctions dépendent eux du temps et constituent les variables du modèle. La qualité de la solution de ces équations va dépendre du nombre de fonctions, et donc de variables, utilisées pour leur description. Les modèles les plus sophistiqués possèdent actuellement un très grand nombre de variables. Toutefois, étudier les détails de la dynamique des solutions de ces modèles est irréalisable.

Une démarche complémentaire, qui est souvent adoptée dans le cadre de l'étude des systèmes dynamiques, est de réduire le nombre de variables à ses éléments essentiels, tout en gardant un degré de réalisme suffisant pour le problème considéré. Dans ce cas, le nombre de variables est petit et on peut analyser en profondeur la dynamique du système. Ces modèles sont qualifiés de modèles de basse dimension. Cette approche de réduction du problème à ses mécanismes essentiels est, bien sûr, une démarche classique dans tous les domaines de la science comme l'atteste la diversité des modèles de basse dimension développés jusqu'à ce jour, allant de modèles chimiques aux modèles de dynamique des populations, en passant par des modèles économiques (voir par exemple Sprott, 2010).

De nombreux modèles de ce type ont vu le jour dans le cadre de la météorologie et de la dynamique du climat. Le plus célèbre est sans doute celui de Saltzman (1962), ayant pour origine le problème de la convection thermique, qui fut utilisé par Lorenz (1963) pour démontrer la présence de la propriété de sensibilité aux conditions initiales dans un système non linéaire simple. Plus récemment, des modèles plus en relation avec la dynamique atmosphérique à grande échelle aux latitudes moyennes ont vu le jour, servant notamment à étudier le développement des zones de hautes et basses pressions aux latitudes moyennes (Charney et Devore, 1979; Charney et Straus, 1980; Reinhold et Pierrehumbert, 1982). Dans le contexte de la modélisation du climat, plusieurs modèles ont également été développés dans le même esprit (Lorenz, 1984; Roebber, 1995). Récemment, un modèle

couplé océan-atmosphère de basse dimension pour les latitudes moyennes a été construit. Il présente une grande flexibilité quant au nombre de variables utilisées. Il peut être utilisé en mode « basse dimension » avec une dizaine de variables ou bien en mode « taille intermédiaire » avec un nombre de variables qui, en pratique, peut aller jusqu'à un bon millier (Vannitsem *et al.*, 2015; Vannitsem, 2015; De Cruz *et al.*, 2016). Il existe également toute une série de modèles de basse dimension décrivant la dynamique du système couplé océan-atmosphère au niveau des zones tropicales qui permettent notamment de comprendre l'émergence du phénomène El Niño, mais nous ne les aborderons pas dans le cadre de cet article et nous renvoyons le lecteur à un article récente sur le sujet (Hu *et al.*, 2017).

Enfin, il existe également des modèles de taille intermédiaire utilisés essentiellement pour étudier la dynamique de l'atmosphère et du climat et qui, eux, possèdent un nombre de variables beaucoup plus grand encore. Ces modèles contiennent une représentation d'un plus grand nombre de processus physiques et sont donc plus réalistes que les modèles de basse dimension. Ils ont également l'avantage de pouvoir être intégrés numériquement sur des périodes longues de l'ordre de plusieurs milliers d'années. Mais à la différence des modèles de basse dimension, la compréhension profonde de la dynamique sous-jacente des solutions générées par ces modèles reste problématique, tout comme celle des modèles détaillés du climat qui contiennent des millions de variables.

La hiérarchie de modèles allant de quelques variables à plusieurs millions de variables, en passant par les modèles de taille intermédiaire, forme un ensemble d'outils permettant d'aborder une gamme large de problématiques liées à la dynamique de l'atmosphère et du climat. Dans la suite, nous nous intéresserons à trois modèles en particulier : le modèle atmosphérique de Charney et Straus (1980), le modèle de taille intermédiaire de Marshall et Molteni (1993) et une version du modèle océan-atmosphère développé à l'Institut royal météorologique de Belgique (Vannitsem, 2015). Ces trois modèles seront respectivement notés I, II et III.

## Description du modèle I

Le modèle I se base sur les équations de la dynamique de l'atmosphère à

grande échelle. Ce sont des équations aux dérivées partielles pour la vorticité à deux niveaux différents en coordonnées de pression (250 et 750 hPa). Ces équations sont complétées par une équation thermodynamique pour l'évolution de la température à un niveau intermédiaire de pression de 500 hPa. Ces équations sont définies sur un domaine rectangulaire de dimension large,  $L_x \times L_y$ , avec  $L_x = 2 L_y/n$  et  $n$  le rapport d'aspect. On suppose que dans la direction zonale ( $x$ ) les conditions aux limites sont périodiques<sup>1</sup> et que, suivant la direction méridionale ( $y$ ), aucun flux ne passe au travers des bords. En d'autres termes, cette dernière condition implique que la dynamique se déroule dans un canal ouvert dans la direction zonale  $x$ .

Les différents champs dont l'évolution est décrite par ces équations sont ensuite développés en séries de fonctions orthogonales ne dépendant que de l'espace, en l'occurrence en série de Fourier sévèrement tronquée à un petit nombre de modes. Pour le modèle I, on se limite à six modes. Ces séries tronquées sont ensuite introduites dans les équations et, après projection sur ces différents modes, des équations d'évolution sont obtenues pour les coefficients dépendants du temps. Après quelques manipulations, on arrive à un jeu de douze équations différentielles ordinaires, non linéaires, de la forme :

$$\frac{dz_i}{dz} = c_i + \sum_{j,k=1}^N m_{i,j} z_j + \sum_{j=1}^N t_{i,j,k} z_j z_k \quad (1 \leq i \leq N) \quad (1)$$

où les variables qui dépendent du temps sont notées  $z_i$  pour  $i = 1, N$ , avec  $N$  le nombre total de variables (ici,  $N = 12$ ). Une matrice  $m_{i,j}$  contient tous les coefficients (constants) multipliant les termes linéaires en la variable  $z_j$  et le tenseur  $t_{i,j,k}$  multiplie les termes non linéaires de forme quadratique.

## Description du modèle II

Le modèle II est un modèle atmosphérique de taille intermédiaire. De manière similaire au modèle I, il se base sur une équation pour la vorticité potentielle qui combine la vorticité

1. Les conditions aux limites périodiques imposent à une solution spatiale de se répéter périodiquement au-delà des limites du domaine. En d'autres termes (et à une dimension spatiale par simplicité), cela équivaut à écrire qu'une solution  $f(x) = f(x + L_x)$  où  $L_x$  est la taille du domaine suivant  $x$ .

absolue et la température. Mais, cette fois-ci, ces équations sont définies sur trois niveaux de pression à 200, 500 et 800 hPa et sur l'ensemble de la surface du globe. Une séparation en zones continentales et zones océaniques est introduite, ainsi qu'une orographie réaliste sur les zones continentales. Enfin, un forçage réaliste des équations est introduit qui dépend de l'espace mais pas du temps. Il permet de donner aux solutions du modèle une variabilité ayant une forte ressemblance avec celle que l'on trouve lors de l'hiver boréal. Les champs sont également développés en séries de fonctions orthogonales, connues sous le nom d'harmoniques sphériques. Ces séries sont tronquées, mais à un ordre plus élevé permettant ainsi d'en avoir une description plus réaliste. Au final, le modèle contient un nombre de variables  $N = 1\,449$ .

### Description du modèle III

Enfin, le dernier modèle utilise les mêmes équations que celles décrites ci-dessus pour le modèle I pour l'atmosphère. Mais il contient en plus un module océanique qui échange énergie radiative et chaleur avec l'atmosphère, ainsi que de la quantité de mouvement. Pour l'océan, la dynamique est décrite par une équation pour la vorticité. La température dans l'océan est considérée comme un scalaire passif transporté par l'océan. Ce champ de température interagit néanmoins avec l'atmosphère. Ces équations sont définies sur un domaine équivalent à celui du modèle I, avec les mêmes conditions aux limites horizontales pour l'atmosphère. Pour l'océan, les conditions aux limites sont choisies de telle façon à former un bassin océanique clos. Les champs sont ensuite développés en séries de Fourier, respectant les conditions aux limites et tronquées à un nombre fini de modes. Nous nous limiterons dans les analyses qui vont suivre à la version du modèle à 36 variables utilisée dans Vannitsem (2015).

## La prévisibilité de l'atmosphère et du climat

Intéressons-nous maintenant aux propriétés de prévisibilité de ces différents modèles en faisant usage des outils décrits aux encadrés 1 et 2, à savoir la croissance de l'erreur quadratique moyenne et les exposants de Lyapunov.

## 2. Les exposants de Lyapunov

La théorie des systèmes dynamiques cherche à étudier et décrire les propriétés des solutions de systèmes dépendants du temps. L'analyse de ces systèmes peut se faire au travers de techniques analytiques, géométriques et/ou probabilistes. Dans ce cadre, il arrive souvent que l'évolution du système d'intérêt soit décrite dans un espace des phases (voir Royer et Nicolis (1994) pour plus de détails sur ces notions). Cet espace des phases est un espace euclidien dont les coordonnées sont données par l'ensemble des variables du système d'intérêt. Pour donner un exemple, on peut imaginer que chaque coordonnée de l'espace des phases soit donnée par la température, la pression... en chaque point d'un réseau d'observation. Au sein de cet espace, un état instantané du système est représenté par un point, et une courbe continue dans cet espace représente l'évolution du système durant un certain laps de temps. La vitesse le long de cette trajectoire détermine la relation vectorielle qui lie l'ensemble des variables décrivant le système.

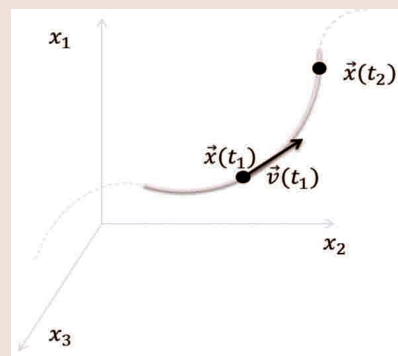


Figure 2.1. Illustration de l'évolution d'un système dynamique dans un espace des phases à trois dimensions.

De manière plus formelle, on peut écrire l'évolution du système dynamique d'intérêt comme

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, \{\gamma\}) \quad (2.1)$$

où  $\vec{x}$  est un vecteur dont l'ensemble des composantes sont les variables du système. Comme on peut s'en rendre compte, ce vecteur est en principe de dimension infinie puisqu'il y a une infinité de points couvrant la surface du globe. Mais, en pratique, le nombre de points, et donc de variables, utilisés dans un modèle de prévision est fini, car le calculateur sur lequel il est implémenté ne peut effectuer qu'un nombre fini d'opérations. L'ensemble  $\{\gamma\}$  contient un certain nombre de paramètres qui interviennent dans le modèle. La fonction vectorielle  $\vec{v}$  représente les tendances qui influencent l'évolution du vecteur  $\vec{x}$  et qui contient des termes linéaires et non linéaires.

Imaginons que nous soyons dans l'espace des phases défini par l'ensemble des éléments du vecteur  $\vec{x}(t)$  et que nous suivions l'évolution de ce vecteur au cours du temps. La solution de l'équation (2.1) suit alors une courbe dans cet espace des phases comme illustré à la figure 2.1. Maintenant, comme nous l'avons

mentionné auparavant, les incertitudes liées par exemple aux erreurs de mesures vont croître dans un système chaotique. Cette dynamique peut également se visualiser dans l'espace des phases comme à la figure 2.2. Dans cette représentation stylisée à deux dimensions, un disque autour de la solution à l'instant  $t_1$  caractérise l'incertitude sur la localisation précise de l'état de référence du système. À l'instant  $t_2$ , le disque d'incertitude s'est transformé en une ellipse sous l'effet de la dynamique. L'ellipse est alors caractérisée par un grand axe et un petit axe associés respectivement à une direction de croissance de l'erreur et une direction de décroissance de l'erreur. Notons donc les vecteurs le long de ces axes principaux comme  $\vec{g}_i$  où  $i$  est l'indice du numéro du vecteur allant de 1 à  $N$  avec  $N$  la dimension de l'espace des phases.

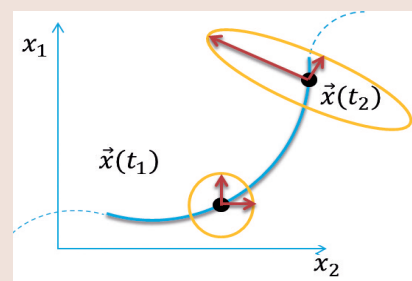


Figure 2.2. Amplification d'un disque dans une projection bidimensionnelle de l'espace des phases, définissant la zone d'incertitude le long de la trajectoire de la solution. Les vecteurs indiqués dans le disque et l'ellipsoïde sont les axes principaux de ces figures géométriques, qui sont aussi les vecteurs propres d'un opérateur symétrique dépendant du temps caractérisant l'amplification des perturbations.

Imaginons maintenant que nous considérons des perturbations dans toutes les directions de l'espace des phases le long de la trajectoire. On a alors  $N$  vecteurs orthogonaux caractérisant l'hypervolume à  $N$  dimensions. Chacun de ces vecteurs va donner une information sur l'amplification dans cette direction particulière dans l'espace à  $N$  dimensions. Si maintenant on regarde cette amplification pour des erreurs initiales d'amplitude tendant vers 0 et pour des temps tendant vers l'infini, on obtient des quantités connues sous le nom d'exposants de Lyapunov. Ils peuvent être définis comme

$$\sigma_i = \lim_{t \rightarrow t_1 + \infty} \lim_{|\vec{g}_i(t_1)| \rightarrow 0} \frac{1}{t - t_1} \ln \frac{|\vec{g}_i(t)|}{|\vec{g}_i(t_1)|} \quad (2.2)$$

où  $|\cdot|$  représente la norme du vecteur et  $\ln$  est le logarithme népérien. Ces exposants sont ordonnés par valeur décroissante et on parle alors de spectre des exposants de Lyapunov. Si le premier d'entre eux (au moins) est positif, alors les erreurs vont croître au cours du temps et on qualifie le système de chaotique. Pour de plus amples explications sur les exposants de Lyapunov et les vecteurs associés, on pourra se référer à Legras et Vautard (1996).

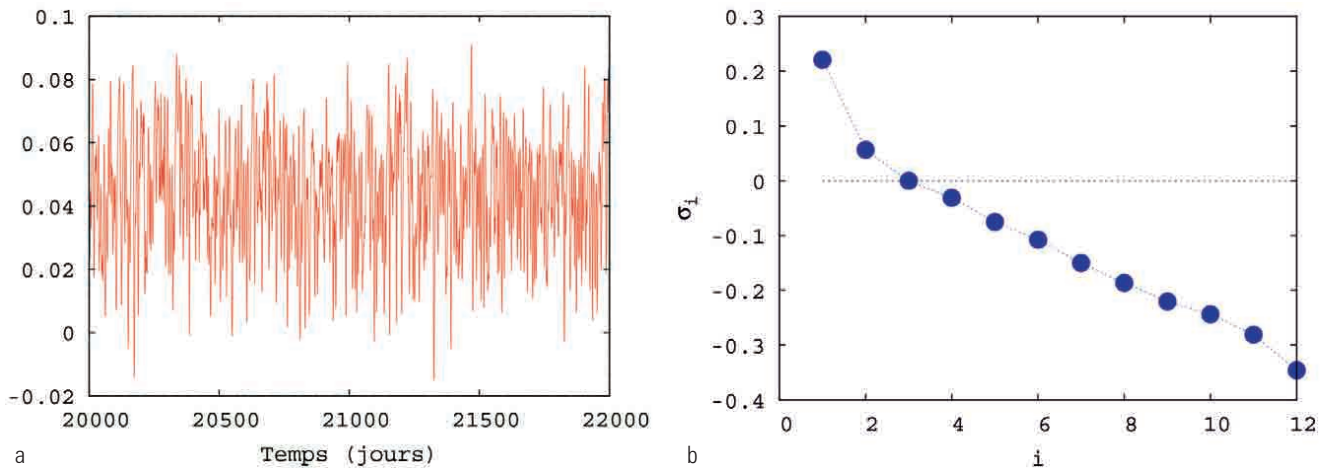


Figure 2. (a) Évolution temporelle de la première variable associée à la température ; (b) spectre des exposants de Lyapunov de la solution, pour le modèle I. Les paramètres du modèle (avec la même notation que dans le papier original) utilisés sont :  $2k = k' = h'' = 0,0114$ ,  $\theta^* = 0,18$ ,  $n = 2L_y/L_x = 1,77$ . Les unités des  $\sigma_i$  sont des jour<sup>-1</sup>. Adapté de Vannitsem (2017).

## Le modèle I

La figure 2a représente l'évolution d'une des variables du modèle pour un domaine particulier sur lequel le système est défini avec  $L_x = 5\,649,7$  km,  $L_y = 5\,000$  km. Une des caractéristiques majeures de cette trajectoire est de présenter une allure plutôt erratique en fonction du temps, similaire à ce qu'on peut trouver lorsqu'on analyse des séries d'observations atmosphériques, si on fait abstraction des cycles journalier et annuel. Ce type d'évolution est qualifié d'apériodique, puisqu'aucune régularité ne semble émerger de la dynamique.

Intéressons-nous maintenant à la prévisibilité de ce type de solutions, telle qu'elle est caractérisée dans le cadre des systèmes dynamiques. Pour cela, nous pouvons calculer les exposants de Lyapunov présentés à l'encadré 2. La figure 2b représente les exposants de Lyapunov du modèle pour le cas des paramètres utilisés pour la figure 2a. Sur cette figure, on constate qu'on trouve deux exposants de Lyapunov positifs, un nul et les neuf autres négatifs. L'existence d'exposants positifs nous indique que nous avons effectivement affaire à des solutions chaotiques présentant la propriété de sensibilité aux conditions initiales.

Pour mieux comprendre les implications au niveau de la dynamique de l'erreur, on peut calculer l'erreur quadratique moyenne (notée MSE pour *Mean Square Error* dans la suite) sur un grand nombre de conditions initiales différentes sur l'attracteur du système, permettant ainsi d'obtenir une information indépendante de la condition initiale choisie sur l'attracteur

(figure 3). Il est intéressant de constater que la MSE ressemble fort à la courbe logistique donnée par l'équation (1.2) de l'encadré 1, avec une croissance initiale de nature exponentielle (régime pour lequel les exposants de Lyapunov jouent un rôle important), suivie par une évolution linéaire et finalement une saturation de l'erreur à un niveau donné. Ce plateau final correspond à la MSE qu'on aurait en comparant deux à deux des situations prises aléatoirement le long de la trajectoire représentée sur la figure 2a. La convergence vers ce plateau indique donc la perte complète de prévisibilité, puisque la prévision n'est pas meilleure, en moyenne, que d'utiliser une situation prise aléatoirement dans l'ensemble des solutions possibles du modèle. Notons aussi que le régime pour lequel les exposants de Lyapunov vont jouer un rôle se limite aux échéances de 0 à 40 jours, période qui dépend évidemment de l'amplitude initiale de l'erreur.

Notons toutefois que cette évolution de la MSE ne nous permet pas de caractériser la variabilité de la qualité des prévisions d'un jour à l'autre pour le système considéré. Cette dépendance naturelle de la prévisibilité en fonction de la situation atmosphérique sous-jacente semble générique, comme l'attestent de nombreuses études sur le sujet (voir par exemple Vannitsem, 2017 ; Messori *et al.*, 2017). Pour caractériser cette variabilité, une démarche probabiliste doit être adoptée, impliquant l'analyse de versions locales des exposants de Lyapunov discutés plus haut et/ou l'utilisation de prévisions d'ensemble faisant intervenir plusieurs trajectoires partant de conditions initiales proches

sur l'attracteur du système. Cette dernière approche, illustrée à la figure 1, a été adoptée depuis plus de deux décennies par différents centres météorologiques pour caractériser les incertitudes liées aux prévisions du temps (voir les revues de Yoden, 2007 ; Bouttier et Buizza, 2018).

## Le modèle II

Pour ce modèle, on peut tout d'abord s'intéresser au début du spectre des exposants de Lyapunov, représenté à la figure 4. La première information à retirer est l'existence d'un grand nombre d'exposants positifs formant un spectre quasi continu. Cette caractéristique implique que de nombreuses directions d'instabilité vont jouer un rôle dans la dynamique de l'erreur (pour autant que l'erreur reste petite), que ce soit au niveau de l'amplitude totale de l'erreur ou bien au

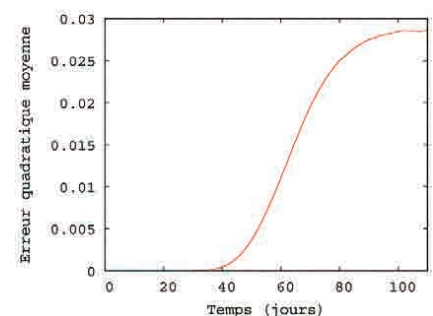


Figure 3. Évolution de l'erreur quadratique moyenne (MSE) en fonction de l'échéance de prévision donnée en jours pour le modèle I avec les paramètres de la figure 2. La moyenne est effectuée sur 100 000 réalisations partant de conditions initiales différentes le long de la trajectoire du système.

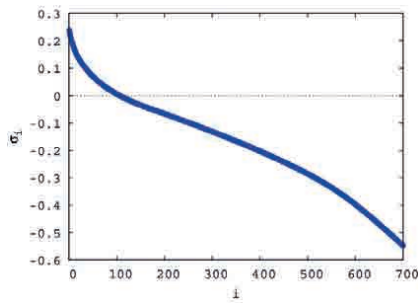


Figure 4. Début du spectre des exposants de Lyapunov pour le modèle II. Il a été obtenu après 3 000 jours d'intégration du modèle. Les unités des  $\sigma_i$  sont des jour<sup>-1</sup>.

niveau des amplifications des erreurs en différents endroits du globe. En d'autres termes, certaines zones du monde seront plus affectées par l'amplification des erreurs que d'autres.

La figure 5 montre l'évolution de la MSE pour le modèle II en utilisant des erreurs sur les conditions initiales petites. Il est remarquable de constater que l'évolution globale suit également une courbe logistique, comprenant une évolution de nature exponentielle, suivie par une amplification linéaire et une phase de saturation. De plus, la MSE sature rapidement à une valeur constante, suggérant qu'après une cinquantaine de jours (pour ce modèle et les erreurs initiales introduites) plus aucune prévisibilité n'est attendue tout comme pour le modèle I.

### Le modèle III

Dans ce modèle, deux fluides aux densités très différentes sont en contact. Ils échangent quantité de mouvement (au travers d'une force de friction), énergie radiative et chaleur. L'existence d'un facteur 1 000 entre les deux densités implique que leurs inerties sont très différentes. Et on pourrait donc penser que ces deux sous-systèmes,

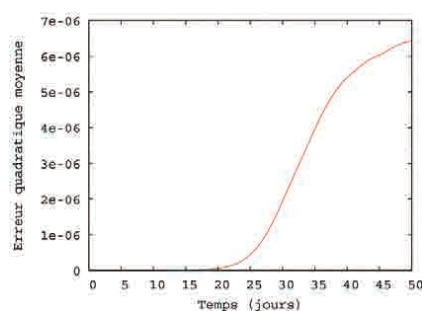


Figure 5. Évolution de la MSE pour le modèle II, obtenue à partir de 1 000 réalisations partant de conditions initiales différentes.

ayant des propriétés dynamiques très différentes, ne doivent pas beaucoup interagir entre eux. Mais comme nous allons le voir ci-dessous la réalité est bien différente et la présence de l'océan peut induire une dynamique lente dans l'atmosphère, permettant d'espérer pouvoir prévoir certaines propriétés de cette dernière sur des temps beaucoup plus longs que les quelques semaines mentionnées aux sections précédentes.

La figure 6 montre une projection de l'espace des phases à 36 dimensions sur l'espace tridimensionnel des variables  $(\Psi_{a,1}, \Psi_{o,2}, T_{o,2})$  qui représentent, respectivement, le coefficient du mode dominant du vent zonal moyenné verticalement (c'est-à-dire sa composante barotrope), le coefficient du mode dominant des lignes de courant dans le bassin océanique qui correspond à un double tourbillon et le mode dominant du champ de température dans l'océan qui caractérise principalement les variations du gradient méridional de température.

Deux groupes d'états instantanés sont représentés sur cette figure appartenant à deux attracteurs obtenus pour deux valeurs différentes du paramètre de friction entre les deux fluides,  $C = 0,0010$  (attracteur rouge) et  $C = 0,0015$  (attracteur vert)  $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$ . Le premier est une projection sans structure bien définie, alors que le second présente une structure très intéressante qui s'organise autour d'une orbite périodique instable. Cette orbite forme en quelque sorte la colonne vertébrale de l'attracteur. Une autre propriété remarquable est que cette orbite périodique a une période très longue de l'ordre de plusieurs dizaines d'années, impliquant que la solution reste confinée pendant des semaines, voire des années dans une région particulière de l'attracteur. Cette orbite périodique instable émerge naturellement de la dynamique couplée au travers d'une bifurcation de Hopf (Vannitsem *et al.*, 2015 ; voir encadré 3) quand on varie l'intensité du forçage solaire pour une amplitude donnée du coefficient de friction  $C$ . Un résultat particulièrement important est que si la friction entre les deux composantes du système est petite, cette bifurcation n'apparaît pas pour une gamme réaliste de forçage solaire ; dans ce cas, la variabilité est très similaire à celle obtenue avec le modèle I.

Le spectre des exposants de Lyapunov caractérisant la nature chaotique ou non de la dynamique est présenté à la figure 7 pour les deux valeurs du

### 3. La bifurcation de Hopf

Une bifurcation pour un système dynamique traduit un changement qualitatif de sa dynamique sous l'effet du changement d'un ou plusieurs paramètres. Dans le contexte d'un système autonome telle que celui présenté à la première équation de l'encadré 2, une bifurcation peut apparaître pour un jeu de paramètres  $\{\gamma\}_0$  si pour un changement infinitésimal de l'un d'entre eux la dynamique sous-tendant les solutions du système présente des propriétés topologiques différentes, telles que le nombre de solutions stationnaires (indépendantes du temps), leurs propriétés de stabilité ou bien encore la nature même de la solution, typiquement périodique, quasi périodique ou chaotique.

Des exemples simples de bifurcation sont la bifurcation transcritique et la bifurcation de *pitchfork* pour lesquelles les solutions stationnaires perdent leur stabilité au profit d'un (transcritique) ou deux (*pitchfork*) autres états stationnaires. Un troisième type de bifurcation simple est la bifurcation de Hopf (ou d'Andronov-Hopf) pour laquelle la solution stationnaire perd sa stabilité au profit d'une solution périodique (cycle limite dans l'espace des phases). Cette nouvelle solution peut être stable ou instable, selon l'émergence sur-critique ou sous-critique de la nouvelle solution. Pour de plus amples informations sur ces bifurcations, voir Guckenheimer (2007) et Kuznetsov (2006).

coefficient de friction  $C$ . La première constatation qu'on peut faire est que ces spectres ont des allures très différentes de ceux présentés pour les autres modèles. En effet, on y trouve un ensemble d'exposants dont les valeurs sont très proches de 0. Ceux-ci sont la signature de la présence d'un océan ayant une inertie plus grande et des échelles de temps d'évolution plus lente. L'autre résultat remarquable est que les exposants de Lyapunov positifs marquant le caractère chaotique de la dynamique et gérant l'évolution des petites erreurs sont plus petits pour l'attracteur vert ( $C = 0,0015 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ ) de la figure 6. Ceci suggère qu'une interaction plus intense avec l'océan a tendance à augmenter la prévisibilité du système pour les temps courts. Notons également qu'une fois que l'orbite périodique instable s'est développée, les instabilités locales (qui peuvent être mesurées par des versions locales des exposants de Lyapunov) varient fortement le long de l'attracteur, avec des zones très (faiblement) instables lorsque  $\Psi_{o,2}$  et  $T_{o,2}$  ont des amplitudes larges (petites). Cette caractéristique nous indique que pour certains « régimes climatiques » la prévisibilité peut être très différente.

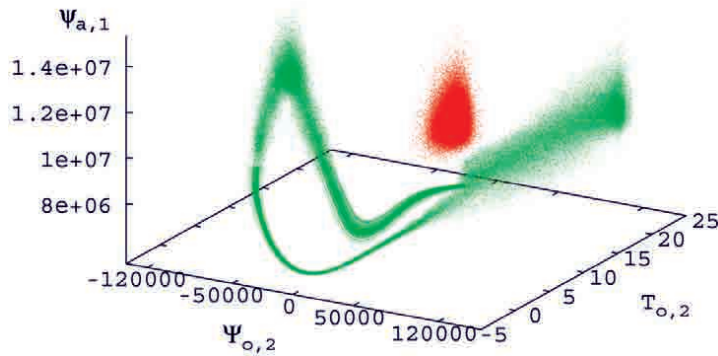


Figure 6. Deux projections tridimensionnelles des attracteurs du modèle III obtenus avec comme paramètres  $C = 0,0010$  (attracteur rouge) et  $C = 0,0015$  (attracteur vert)  $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$ . Selon Vannitsem (2017).

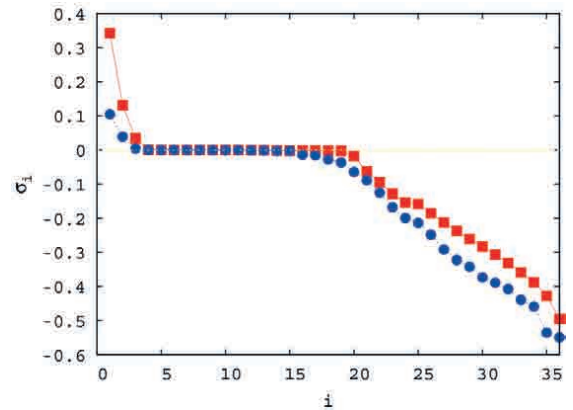


Figure 7. Spectre des exposants de Lyapunov obtenus pour les deux attracteurs présentés sur la figure 6 ( $C = 0,0010$  (rouge) et  $C = 0,0015$  (bleu)  $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$ ). Selon Vannitsem (2017).

Sur la figure 8a, quatre courbes de croissance de la MSE sont représentées : la courbe bleue (étoiles) et la courbe magenta (carrés) représentent, respectivement, les erreurs sur les variables de transport barotrope atmosphérique et de température atmosphérique ; les courbes rouge (plus) et verte (croix) représentent les variables de température et du transport océaniques. Pour cette figure, nous avons utilisé le paramètre  $C = 0,0010 \text{ kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$  correspondant à l'attracteur rouge de la figure 6. On constate donc que dans l'atmosphère la MSE croît rapidement et sature à une valeur constante après 0,1 année, ou en d'autres termes après quelque 30-40 jours, impliquant la perte complète de prévisibilité dans l'atmosphère au-delà de ces échéances. Pour l'océan, l'évolution est très différente, avec une croissance qui persiste bien au-delà de 100 ans.

saturation de l'erreur à un niveau donné indique qu'aucune prévisibilité ne subsiste aux échéances concernées. De ce point de vue, la figure 8b est encore plus intéressante en ce qui concerne la prévisibilité du système sur des temps très longs. La courbe rouge est la MSE pour la variable atmosphérique  $\psi_{a,1}$  pour la même expérience que dans la figure 8a. On constate que l'erreur oscille autour d'une valeur constante pour des échéances élevées, indiquant qu'aucune prévisibilité n'est présente. La courbe verte représente la même quantité, mais pour la seconde valeur de  $C = 0,0015 \text{ kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$  correspondant à l'attracteur vert de la figure 6. Dans ce cas, on constate que la MSE croît encore sur toute la période allant jusqu'à 100 ans. Ceci suggère qu'il reste de la prévisibilité pour ces échéances longues dans ce cas-là. Enfin, une troisième courbe (bleue) est représentée pour un modèle dont la profondeur de l'océan a augmenté et qui possède un attracteur de la forme de celui présenté par les points

verts à la figure 6. Dans ce cas-là, la pente de croissance de l'erreur est plus marquée, comportement qui peut être associée à la période de l'orbite périodique instable autour de laquelle l'attracteur se forme.

## La prévision à long terme du système climatique

Le système climatique fait intervenir un grand nombre de processus ayant des échelles de temps très différentes. Comme nous l'avons discuté plus haut, les océans sont des composantes importantes pouvant influencer sa dynamique. Comme l'atmosphère présente des échelles de temps rapides, avec des phénomènes qui typiquement sont régis par la dynamique des zones de hautes et basses pressions aux latitudes

Comme nous l'avons indiqué lors de l'analyse des modèles précédents, la

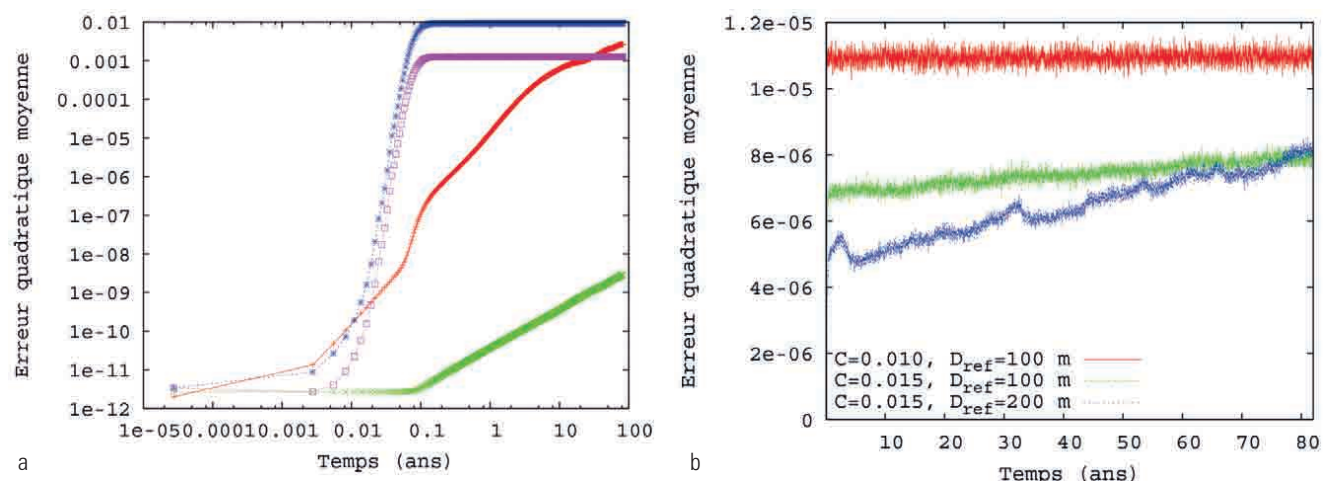


Figure 8. (a) Croissance de la MSE pour les différents champs atmosphériques, fonction de courant barotrope (bleu) et température (rose), et océaniques, fonction de courant (vert) et température (rouge). (b) Évolution de la MSE pour une variable atmosphérique dominante,  $\psi_{a,1}$ , pour trois jeux de paramètres différents du modèle III. Selon Vannitsem (2017).



moyennes, on peut se demander dans quelle mesure on peut prévoir des phénomènes au-delà de quelques semaines. De nombreux chercheurs se penchent sur cette question avec des modèles dont la complication peut aller de quelques dizaines de variables, comme dans cet article, à quelques centaines de millions. Dans le premier cas, les analyses sont plus simples. Nous avons notamment pu montrer dans le cadre d'un modèle couplé océan-atmosphère de basse dimension que pour avoir une prévisibilité à long terme d'une de nos variables il ne suffit pas d'avoir une interaction avec l'océan, mais bien d'avoir une nouvelle dynamique qui émerge faisant à la fois intervenir des variables océaniques et des variables atmosphériques, ces dernières «s'imprégnant» en quelque sorte de la dynamique lente de l'océan. Le couplage entre ces deux composantes climatiques (l'océan et l'atmosphère) est donc une condition nécessaire pour avoir

une prévisibilité à long terme mais pas suffisante. Ce type de solution, émergeant des équations d'évolution du modèle, est issu d'une bifurcation de Hopf, et elle ne peut avoir lieu qu'en présence des variables océaniques et atmosphériques.

Plusieurs signaux présentant une variabilité basse fréquence sur des échelles de temps allant du mois à plusieurs décennies sont présents dans l'atmosphère. On peut mentionner notamment deux signaux bien connus, l'oscillation nord-atlantique et l'oscillation décennale du Pacifique (NAO et PDO en anglais<sup>2</sup>) et on peut se poser la question de savoir dans quelle mesure ils sont issus d'une bifurcation du type de celle mentionnée plus haut. Pour clarifier cette question, des modèles climatiques plus sophistiqués doivent être étudiés. Dans cette perspective, il faudrait, par exemple, analyser le type d'interaction qui existe

au niveau de la surface des océans : l'augmentation de la friction en surface ou le type de modélisation des couches limites océanique et atmosphérique influence-t-il le développement d'une variabilité basse fréquence du type NAO ou PDO? Une fois ces solutions isolées, on peut clarifier dans quelle mesure une prévisibilité étendue est présente dans l'atmosphère aux latitudes moyennes et pour quels types d'observables.

## Remerciements

Ce travail est soutenu en partie par la politique scientifique fédérale belge (BELSPO) au travers de plusieurs projets nationaux, les projets BR/121/A2/STOCHCLIM et BR/165/A2/Mass2Ant.

2. <https://www.esrl.noaa.gov/psd/data/climateindices/list/>

## Bibliographie

- Bouttier F., Buizza R., 2018. La prévision d'ensemble. *La Météorologie*, 100, 29-36.
- Cassou C., Mignot J., 2013. Enjeux, méthodes et fondamentaux de prévisibilité et prévision décennale. *La Météorologie*, 81, 23-30.
- Charney J.G., DeVore J.G., 1979. Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking. *J. Atmos. Sci.*, 36, 1205-1216.
- Charney J.G., Straus D.M., 1980. Form-drag instability, multiple equilibria and propagating planetary waves in baroclinic, orographically forced, planetary wave systems. *J. Atmos. Sci.*, 37, 1157-1176.
- De Cruz L., Demaeyer J., Vannitsem S., 2016. The Modular Arbitrary-Order Ocean-Atmosphere Model: MAOAM v1.0. *Geosci. Model Dev.*, 9, 2793-2808.
- Guckenheimer J., 2007. Bifurcation. *Scholarpedia*, 2(6), 1517.
- Hu Z.-Z., Kumar A., Huang B., Zhu J., Zhang R.-H., Jin F.-F., 2017. Asymmetric evolution of El Niño and La Niña: the recharge/discharge processes and role of the off-equatorial sea surface height anomaly. *Clim. Dyn.*, 49, 2737.
- Kalnay E., 2003. *Atmospheric Modelling, Data Assimilation and Predictability*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Kuznetsov Y.A., 2006. Andronov-Hopf bifurcation. *Scholarpedia*, 1(10): 1858.
- Legras B., Vautard R., 1996. A guide to Liapunov vectors, in *Predictability, Vol 1, Ed. T.N. Palmer, ECMWF Seminar*, ECMWF, Reading, UK, 135-146.
- Lorenz E.N., 1963. Deterministic non periodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20, 130-141.
- Lorenz E.N., 1982. Atmospheric predictability experiments with a large numerical model. *Tellus*, 34, 505-513.
- Lorenz E.N., 1984. Formulation of a low-order model of a moist general circulation. *J. Atmos. Sci.*, 41, 1933-1945.
- Marshall J., Molteni F., 1993. Toward a dynamical understanding of planetary-scale flow regimes. *J. Atmos. Sci.*, 50, 1792-1818.
- Messori G., Caballero R., Faranda D., 2017. A dynamical systems approach to studying midlatitude weather extremes. *Geophys. Res. Lett.*, 44, 3346-3354.
- Nicolis C., 1992. Probabilistic aspects of error growth in atmospheric dynamics. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 118, 553-568.
- Nicolis C., 2016. Error dynamics in extended-range forecasts. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 142, 1222-1231.
- Nicolis C., Nicolis G., 1995. From short-scale atmospheric variability to global climate dynamics: Toward a systematic theory of averaging. *J. Atmos. Sci.*, 52, 1903-1913.
- Pailleux J. et al., 2015. Les 25 ans du système de prévision numérique du temps IFS/Arpège. *La Météorologie*, 89, 18-27.
- Reinhold B.B., Pierrehumbert R.T., 1982. Dynamics of weather regimes: Quasi-stationary waves and blocking. *Mon. Weather Rev.*, 110, 1105-1145.
- Roebber P.J., 1995. Climate variability in a low-order coupled ocean-atmosphere model. *Tellus*, 47A, 473-494.
- Royer J.-F., Nicolis C., 1994. Chaos et Météorologie. *La Météorologie*, 8, 38-53.
- Royer J.-F., Stroe R., Déqué M., Vannitsem S., 1994. An improved formula to describe error growth in meteorological models, In *Predictability and Non-linear modelling in Natural Sciences and Economics*, J. Grasman and G. van Straten (Eds), Kluwer Academic Publishers, 45-56.
- Saltzman B., 1962. Finite amplitude free convection as an initial value problem – I. *J. Atmos. Sci.*, 19, 329-341.
- Sprott J.C., 2010. *Elegant Chaos*. World Scientific, Singapore, 285 p.
- Vannitsem S., Demaeyer J., De Cruz L., Ghil M., 2015. Low-frequency variability and heat transport in a low-order nonlinear coupled ocean-atmosphere model. *Physica D*, 309, 71-85.
- Vannitsem S., 2015. The role of the ocean mixed layer on the development of the North Atlantic Oscillation: A dynamical system's perspective. *Geophys. Res. Lett.*, 42, 8615-8623.
- Vannitsem S., 2017. Predictability of large-scale atmospheric motions: Lyapunov exponents and error dynamics. *Chaos*, 27, 032101.
- Yoden S., 2007. Atmospheric predictability. *J. Meteorol. Soc. Jpn*, 85B, 77-102.